ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 dicembre 1903.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Considerazioni di metrica non-euclidea hanno condotto il sig. Servant a stabilire una notevole relazione fra le superficie isoterme (a linee di curvatura isoterme) e le superficie deformabili con conservazione dei raggi principali di curvatura [1]. Egli trova che ogni superficie isoterma nota determina, *mediante le loro equazioni intrinseche*, due superficie applicabili al modo di Bonnet [2], ed inversamente ogni coppia di superficie applicabili di Bonnet determina *intrinsecamente* una superficie isoterma. Così si riconosce che i due problemi di determinare le superficie isoterme, ovvero le coppie di superficie applicabili di Bonnet, sono equivalenti *a meno dell'integrazione di equazioni differenziali del tipo di Riccati*. Scopo della presente Nota è di completare i risultati del Servant col dimostrare che l'integrazione delle equazioni di Riccati può essere risparmiata, *bastando sole quadrature* per passare da una superficie isoterma nota ad una coppia di superficie applica-

[1] Servant, *Sur deux problèmes de géométrie.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 2 Juin 1902, t. 134.

[2] Come è noto, il problema di determinare le coppie di superficie applicabili con conservazione dei raggi principali di curvatura fu trattato dal Bonnet (Journal de l'École Polytehnique 42ème Cahier 1867); diciamo per ciò brevemente ogni tale coppia di superficie *una coppia di Bonnet*.

bili di Bonnet ed inversamente. Tanto si ottiene utilizzando le proprietà delle *rappresentazioni di Clifford* delle superficie dello spazio ellittico studiate dal prof. Fubini nella sua tesi di laurea [1]; così si rende in pari tempo palese la ragione geometrica dell'equivalenza dei due problemi.

Casi particolari notevoli di superficie isoterme dello spazio ellittico sono dati dalle superficie Σ d'area minima, o a curvatura media nulla, e più in generale da quelle di curvatura media costante. Se la superficie Σ è ad area minima, la coppia corrispondente di Bonnet di superficie applicabili dello spazio euclideo è formata da due superficie di curvatura media costante, che sono trasformate l'una dell'altra colla trasformazione involutoria di Hazzidakis; inversamente ogni tale coppia di superficie di curvatura media costante dà, con quadrature, una superficie minima dello spazio ellittico.

Quando la superficie Σ è di curvatura media costante non nulla, la coppia corrispondente di Bonnet è ancora di superficie a curvatura media costante; ma questa volta, anzichè da una trasformazione di Hazzidakis, le due superficie sono legate da una trasformazione di Lie Bonnet, cioè le linee di curvatura dell'una tagliano sotto angolo costante le linee che corrispondono a quelle di curvatura sull'altra.

Si vedrà poi che anche la trasformazione di Lie delle ordinarie superficie pseudosferiche è suscettibile, in geometria ellittica, di un'analoga interpretazione.

Le considerazioni di metrica ellittica qui svolte sotto un aspetto particolare, in vista dello speciale problema a cui si riferiscono, possono ricevere una più ampia interpretazione ed impiegarsi utilmente in altri problemi della teoria dell'applicabilità, come dimostrerò prossimamente.

2. Conviene dapprima che ricordiamo i risultati del Fubini, relativi alla doppia rappresentazione di Clifford di una superficie Σ dello spazio ellittico.

Per un punto fisso O dello spazio si conducano le parallele tutte nel senso *destrorso*, ovvero nel *sinistrorso* [2], alle diverse normali della superficie Σ e queste parallele si intersechino col piano π polare di O. Ogni punto P di Σ dà così due punti immagini Q, Q', situati sui detti raggi paralleli alla normale in P, alla distanza di un quadrante da O. I due punti Q, Q', movendosi P sopra Σ, descrivono sul piano π le due rappresentazioni di Clifford, destrorsa e sinistrorsa, della superficie Σ. Il Fubini ha dimostrato che le due figure descritte da Q, Q' si corrispondono per eguaglianza d'aree; ed inversamente se si ha una rappresentazione equivalente (che conservi le aree) del piano π sopra sè stesso, le due figure descritte da due punti corrispondenti sono sempre le immagini di Clifford di una superficie Σ dello spazio

[1] G. Fubini, *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellitici*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. IX, 1900.

[2] Vedi le mie: *Lezioni di geometria differenziale* (2ª edizione), vol. I, § 198.

ellittico (e delle sue parallele). Note le due immagini di Clifford di una superficie Σ, questa si ottiene con quadrature (Fubini, l. c. § 20).

Si riferisca ora la superficie Σ alle sue linee di curvatura (u, v) e sia

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare di Σ; r_1, r_2 i suoi raggi principali di curvatura. In ogni punto di Σ si consideri il triedro principale formato 1° dalla tangente alla linea $v = \mathrm{cost}$, 2° dalla tangente alla linea $u = \mathrm{cost}$, 3° dalla normale alla superficie e si indichino rispettivamente con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) *i parametri di scorrimento* [1], destrorsi o sinistrorsi, degli spigoli del triedro principale. Sussistono allora le formole fondamentali [2]:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{r_2} X_3\,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} X_1 \pm \sqrt{\mathrm{E}}\, X_3\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{r_1} X_1 \mp \sqrt{\mathrm{E}}\, X_2 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} X_2 \mp \sqrt{\mathrm{G}}\, X_3\,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} X_1 - \frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{r_1} X_3\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \pm\sqrt{\mathrm{G}}\, X_1 + \frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{r_1} X_2\,, \end{aligned}\right.$$

colle analoghe per Y, Z, valendo i segni superiori per i parametri di scorrimento destrorsi, gli inferiori pei sinistrorsi.

3. Supponiamo ora che la superficie Σ sia a linee di curvatura (u, v) isoterme, ed introducendo parametri u, v isometrici, poniamo

$$\mathrm{E} = \mathrm{G} = e^{2\theta}\,;$$

le (1) diventano

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v} X_2 - \frac{e^\theta}{r_2} X_3\,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v} X_1 \pm e^\theta X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{e^\theta}{r_2} X_1 \mp e^\theta X_2 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u} X_2 \mp e^\theta X_3\,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u} X_1 - \frac{e^\theta}{r_1} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \pm e^\theta X_1 + \frac{e^\theta}{r_1} X_2\,. \end{aligned}\right.$$

Queste dimostrano che le tre espressioni

$$e^{-\theta}(X_1\, du - X_2\, dv)\quad,\quad e^{-\theta}(Y_1\, du - Y_2\, dv)\quad,\quad e^{-\theta}(Z_1\, du - Z_2\, dv)$$

[1] *Lezioni*, vol. I, § 199.

[2] Queste si deducono facilmente dalle formole al § 215 delle mie *Lezioni*.

sono tre differenziali esatti. Poniamo:

$$(3)\quad x=\int e^{-\theta}(X_1\,du-X_2\,dv)\,,\ y=\int e^{-\theta}(Y_1\,du-Y_2\,dv)\,,\ z=\int e^{-\theta}(Z_1\,du-Z_2\,dv)\,,$$

e riguardiamo x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto mobile nello spazio euclideo; questo punto descriverà una superficie S di elemento lineare

$$(4)\qquad ds^2=e^{-2\theta}(du^2+dv^2)\,.$$

Per distinguere i parametri di scorrimento destrorsi dai sinistrorsi, indicheremo i primi colle notazioni superiori, i secondi colle analoghe

$$\overline{X}_1\,,\ \overline{X}_2\,,\ \overline{X}_3\quad \text{ecc.}$$

Se poniamo ora

$$(3^*)\quad \bar{x}=\int e^{-\theta}(\overline{X}_1\,du-\overline{X}_2\,dv)\,,\ \bar{y}=\int e^{-\theta}(\overline{Y}_1\,du-\overline{Y}_2\,dv)\,,\ \bar{z}=\int e^{-\theta}(\overline{Z}_1\,du-\overline{Z}_2\,dv)\,,$$

il punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ descriverà nello spazio euclideo una seconda superficie $\overline{S}$ dello stesso elemento lineare (4), cioè applicabile sulla S.

Ma calcoliamo ora per S, $\overline{S}$ le due *seconde* forme quadratiche fondamentali

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2$$
$$\overline{D}\,du^2+2\overline{D}'\,du\,dv+\overline{D}''\,dv^2\,,$$

per la qual cosa basterà osservare che la normale alla S ha i coseni di direzione X_3, Y_3, Z_3 e la normale di $\overline{S}$ i coseni $\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$. Osservando le (2), (3), (3*), otteniamo così:

$$(5)\quad \begin{cases} D=-\dfrac{1}{r_2}\,, & D'=-1\,, \quad D''=\dfrac{1}{r_1} \\[2mm] \overline{D}=-\dfrac{1}{r_2}\,, & \overline{D}'=+1\,, \quad \overline{D}''=\dfrac{1}{r_1}\,. \end{cases}$$

Come si vede, le due superficie applicabili S, $\overline{S}$ non sono congruenti nè simmetriche, avendo differenti (pel segno di D') le due seconde forme fondamentali. Però, calcolando le loro curvature medie H, $\overline{H}$, troviamo

$$(6)\qquad H=\overline{H}=e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right);$$

dunque: *Le due superficie* S, $\overline{S}$ *dello spazio euclideo, dedotte con quadrature dalla superficie isoterma* Σ, *sono applicabili l'una sull'altra ed hanno,* *in punti corrispondenti, gli stessi raggi principali di curvatura; costituiscono cioè una coppia di Bonnet.*

4. È facile invertire il risultato precedente e dimostrare che ad ogni coppia nota $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili al modo di Bonnet corrisponde una superficie isoterma Σ dello spazio ellittico.

Si riferiscano infatti le due superficie $S, \overline{S}$ a quel sistema (u, v) che è formato dalle linee cinematicamente autoconiugate [1], sicchè essendo

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

la prima forma fondamentale comune, le due seconde forme fondamentali siano date da

$$\begin{gathered} D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2 \\ D\, du^2 - 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2 . \end{gathered}$$

Poichè $S, \overline{S}$ hanno, in punti corrispondenti, eguale curvatura media, sarà

$$ED'' + GD - 2FD' = ED'' + GD + 2FD',$$

onde segue $F = 0$. Ma le equazioni di Codazzi, dovendo essere soddisfatte anche cangiando il segno di D', si scindono nelle quattro:

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} D - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} D'' = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right) \\ \frac{\partial D''}{\partial u} &= \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} D'' - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} D = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right) \\ \frac{\partial D'}{\partial u} &= \left(\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right) D' = \frac{\partial}{\partial u}\left(\log\sqrt{\frac{G}{E}}\right) . D' \\ \frac{\partial D'}{\partial v} &= \left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right) D' = \frac{\partial}{\partial v}\left(\log\sqrt{\frac{E}{G}}\right) . D' . \end{aligned}\right.$$

Dalle due ultime si trae

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\log\sqrt{\frac{G}{E}}\right) = 0 ,$$

il che dimostra come il sistema (u, v) sia, oltre che ortogonale, isotermo. Prendendo parametri isometrici, potremo dunque porre

$$E = G = e^{-2\theta},$$

[1] *Lezioni* ecc., vol. II, § 238.

dopo di che le prime due equazioni (α) danno

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v}(D + D'') \\[2ex] \dfrac{\partial D''}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u}(D + D''), \end{cases}$$

e le due seconde (α) provano che si ha $D' = \text{cost}^{\text{te}}$, onde si potrà fare $D' = \pm 1$, moltiplicando i parametri u, v per un fattore costante.

Si vede allora che nello spazio ellittico (di curvatura $K_0 = +1$) esiste una superficie Σ a linee di curvatura isoterme (u, v) coll' elemento lineare

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

e colle curvature principali date da

$$\frac{1}{r_2} = -D \quad , \quad \frac{1}{r_1} = D''.$$

Si verifica infatti che risultano per tal modo soddisfatte le equazioni di Gauss e di Codazzi dello spazio ellittico. Questa superficie Σ ha per immagini di Clifford le due immagini sferiche di $S, \overline{S}$ (¹). Per quanto ha dimostrato il Fubini (l. c.), segue che dalla coppia nota $(S, \overline{S})$ di superficie di Bonnet si ottiene Σ con quadrature.

L' equivalenza dei due problemi è così stabilita geometricamente dalla proposizione:

Le due immagini di Clifford di una superficie isoterma Σ dello spazio ellittico danno le immagini sferiche di una coppia di superficie $(S, \overline{S})$ *dello spazio euclideo, applicabili con conservazione dei raggi principali di curvatura, ed inversamente; alle linee di curvatura di Σ corrisponde il sistema cinematicamente autoconiugato di* $S, \overline{S}$. *Nota la superficie Σ, si ottiene con quadrature la coppia di Bonnet* $(S, \overline{S})$, *e viceversa.*

5. Consideriamo nello spazio ellittico una superficie Σ d' area minima. Riferendola alle sue linee di curvatura (u, v) avremo (²):

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

$$r_1 = e^{2\theta} \quad , \quad r_2 = -e^{2\theta},$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + e^{2\theta} - e^{-2\theta} = 0.$$

(¹) Come è ben noto il piano π della geometria ellittica può riguardarsi come una sfera di raggio $= 1$ dello spazio euclideo, che assumiamo qui come sfera rappresentativa di Gauss.

(²) *Lezioni*, vol. II, § 352.

Le formole (5) dimostrano che per la coppia $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili di Bonnet nello spazio euclideo, che si deducono colle quadrature (3), (3*) da Σ, si ha

$$\begin{cases} ds^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2) \\ D = e^{-2\theta},\ D' = -1,\ D'' = e^{-2\theta} \\ \overline{D} = e^{-2\theta},\ \overline{D}' = +1,\ \overline{D}'' = e^{-2\theta}. \end{cases}$$

Esse hanno quindi la curvatura media costante $= 2$ e le loro linee di curvatura sono le $u \pm v = \text{cost}$, che corrispondono alle linee assintotiche di Σ. Ne risulta che $S, \overline{S}$ sono trasformate l'una dell'altra per la trasformazione involutoria di Hazzidakis (1).

Possiamo dare a questi risultati la forma seguente:

Se di una superficie minima Σ dello spazio ellittico si costruiscono le due immagini di Clifford delle linee assintotiche, queste sono le immagini sferiche delle linee di curvatura di due superficie $S, \overline{S}$ a curvatura media costante dello spazio euclideo, coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis.

Applichiamo ora alla coppia $(S, \overline{S})$ una delle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura media costante che si deducono dall'inversione dei teoremi di Guichard; otterremo così una nuova coppia $(S', \overline{S}')$ di tali superficie, coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis (2). A questa coppia $(S', \overline{S}')$ corrisponderà una nuova superficie minima Σ' dello spazio ellittico.

Quale è la relazione geometrica fra Σ e Σ'? Si può dimostrare che Σ, Σ' sono le due falde focali di una congruenza, e le due superficie Σ, Σ' si corrispondono per linee assintotiche e per linee di curvatura in una rappresentazione conforme. Troviamo così che anche nello spazio ellittico esistono le singolari congruenze W a falde focali d'area minima, scoperte da Thybaut per lo spazio euclideo (3).

6. Prendiamo ora nello spazio ellittico una superficie Σ di curvatura media costante $= \frac{1}{R}$ riferita alle sue linee di curvatura (u, v); avremo (4):

$$\begin{cases} ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2) \\ \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1 + e^{-2\theta}}{2R},\quad \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1 - e^{-2\theta}}{2R}, \end{cases}$$

(1) *Lezioni*, vol. II, §§ 237, 393.

(2) *Lezioni*, vol. II, § 405.

(3) Delle congruenze di Thybaut negli spazî di curvatura costante, e di altre classi speciali di congruenze, mi occupo in una Memoria di prossima pubblicazione negli Annali di matematica.

(4) Cf. la mia Memoria: *Sulle superficie d'area minima negli spazî di curvatura costante.* Atti dei Lincei, serie 4ª, vol. IV, 1888.

essendo θ una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$(7^*)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+e^{2\theta}\left(1+\frac{1}{4R^2}\right)-\frac{e^{-2\theta}}{4R^2}=0,$$

che si riduce del resto alla (7), cangiando θ , u , v in $\theta + c , ku , kv$, e determinando convenientemente le costanti c , k.

Per le superficie $S , \overline{S}$ dello spazio euclideo, applicabili al modo di Bonnet, che le formole (3), (3*) fanno derivare per quadrature dalla Σ, troviamo:

$$\begin{cases} ds^2 = e^{-2\theta}(du^2+dv^2) \\ D=-\dfrac{1+e^{-2\theta}}{2R}, D'=-1, D''=\dfrac{1-e^{-2\theta}}{2R} \\ \overline{D}=-\dfrac{1+e^{-2\theta}}{2R}, \overline{D}'=+1, \overline{D}''=\dfrac{1-e^{-2\theta}}{2R} \end{cases}$$

e quindi

$$H=\overline{H}=-\frac{1}{R}.$$

Dunque le $S , \overline{S}$ hanno ancora la medesima curvatura media costante. Ma siccome le loro rispettive linee di curvatura hanno le equazioni differenziali

$$du^2 \pm \frac{1}{R}\, du\, dv - dv^2 = 0,$$

vediamo che, applicando la S sulla $\overline{S}$, le antiche linee di curvatura tagliano le nuove sotto un angolo costante σ dato dalla formola

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{2R}.$$

Questa volta adunque le due superficie di curvatura media costante $S , \overline{S}$ sono legate, invece che dalla trasformazione involutoria di Hazzidakis, da una trasformazione di Lie-Bonnet (¹).

In successive Memorie pubblicate negli Annali di matematica (²) mi sono occupato delle trasformazioni delle superficie a curvatura media costante dello spazio euclideo e dello spazio ellittico (ed iperbolico) che nascono dalla inversione dei teoremi di Guichard. Le osservazioni precedenti collegano le relative trasformazioni nello spazio ellittico a quelle nello spazio euclideo. Vediamo che i risultati più completi si ottengono dallo spazio ellittico in quanto che i due sensi del parallelismo danno luogo ogni volta ad una coppia di superficie a curvatura media costante nello spazio euclideo, colle-

(¹) *Lezioni*, vol. II, § 394.
(²) Serie 3ª, t. III, IV e V.

gate da una trasformazione di Lie-Bonnet. Ne risulta così che le nuove trasformazioni delle superficie a curvatura media costante sono permutabili, oltre che colla trasformazione di Hazzidakis [1], anche con quella di Lie-Bonnet.

7. I risultati precedenti conducono spontaneamente a proporsi un'altra questione che, sebbene non si colleghi direttamente colle superficie isoterme, vogliamo qui risolvere.

Le superficie di curvatura media costante, dello spazio ellittico o dell'euclideo, ammettono due superficie parallele a curvatura assoluta K costante (teorema di Bonnet).

Indicando con K questa curvatura, si ha $K > 1$ nel caso ellittico e $K > 0$ nel caso euclideo; sicchè possiamo dire che una superficie Σ a curvatura costante $K > 1$ dello spazio ellittico dà, con quadrature, una coppia di superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo, legate fra loro da una trasformazione di Lie-Bonnet ovvero da una trasformazione di Hazzidakis (se in particolare $K = 2$) [2].

Consideriamo ora nello spazio ellittico una superficie Σ che sia ancora di curvatura assoluta K costante, ma con $K < 1$, e domandiamo se anche una tale superficie si collega a quelle di curvatura costante nello spazio euclideo. Dimostreremo che ciò accade effettivamente; ma questa volta le superficie che se ne deducono nello spazio euclideo sono pseudosferiche.

Possiamo supporre $K > 0$, chè altrimenti sostituiremo alla Σ la sua polare. Posto $K = \operatorname{sen}^2\sigma$, essendo σ un angolo reale costante, riferiamo la superficie Σ alle sue linee di curvatura (u, v). Avremo:

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2$$

$$\frac{1}{r_2} = \cos\sigma \operatorname{tg}\theta \;,\quad \frac{1}{r_1} = -\cos\sigma\cot\theta\,,$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{sen}^2\sigma \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0.$$

Calcolando mediante le (1) il ds'^2 delle immagini di Clifford, troviamo

$$ds'^2 = dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2 = (\cos^2\theta + \cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\theta)\, du^2 \pm 2\cos\sigma\, du\, dv + {} $$
$$+ (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\sigma\cos^2\theta)\, dv^2,$$

ovvero, prendendo per linee coordinate le immagini delle linee assintotiche di Σ e ponendo

$$\alpha = \frac{1 \pm \cos\sigma}{2}(u + v) \;,\quad \beta = \frac{1 \mp \cos\sigma}{2}(u - v)\,,$$

[1] *Lezioni*, vol. II, § 405.
[2] Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 352.

troviamo

$$ds'^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\theta\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 .$$

Ora questo è, nello spazio euclideo, l'elemento lineare sferico riferito alle immagini delle linee assintotiche di una superficie pseudosferica. Secondo che si prendono i segni superiori o gli inferiori si hanno così due superficie pseudosferiche ordinarie $S, \bar{S}$ le quali, come subito si vede, sono legate l'una a l'altra da una trasformazione di Lie [1]. Per le formole effettive che nota Σ, danno $S, \bar{S}$ con quadrature troviamo

$$x = \int (\{\pm \operatorname{sen}\theta X_2 + \cos\sigma\cos\theta X_1\}\, du + \}\pm \cos\theta X_1 \cos\sigma \operatorname{sen}\theta X_2\{\, dv),$$

e le analoghe per y, z; i segni superiori danno la S, gli inferiori, messe $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ al posto di X_1, X_2 danno la $\bar{S}$.

Possiamo formulare questi risultati geometricamente così:

Le due immagini di Clifford delle linee assintotiche di una superficie Σ dello spazio ellittico di curvatura assoluta costante $K > 1$, *danno le immagini sferiche delle assintotiche di due superficie pseudosferiche ordinarie* $S, \bar{S}$, *legate l'una all'altra da una trasformazione di Lie. Nota* Σ, *bastano quadrature per trovare* $S, \bar{S}$.

Chimica. — *Le proprietà colloidali del fluoruro di calcio.* Nota II [2] dei Socio E. Paternò e di E. Mazzucchelli.

La facilità con cui, solo variando di poco la concentrazione, può farsi che un miscuglio in date proporzioni dia un precipitato di $CaFl_2$ o una soluzione colloidale, ci ha dato il modo di esaminare alcuni dei fenomeni fisici che avvengono durante la formazione delle soluzioni colloidi. Comunemente si ammette che le soluzioni colloidi abbiano un calore di precipitazione nullo, e questo non è uno degli ultimi argomenti per negare loro il carattere di vere soluzioni. Per vedere se questo fatto è di carattere universale e se ha tutta la portata che comunemente gli si attribuisce, si è studiata calorimetricamente la reazione: $2CaCl_2 + 2KFl = CaFl_2 + 2KCl + CaCl_2$ in varie condizioni di diluizione, cioè facendo in modo che nel miscuglio definitivo si avesse un grammoatomo di fluoro in tre litri, in sei, in dodici. Nei primi due casi sa ha precipitazione quasi istantanea del fluoruro, mentre nell'ultimo la soluzione resta opalina per lungo tempo. Per confrontare si fecero determinazioui analoghe coi miscugli $Ca\ (C_2H_3O_2)_2 + KFl$ dove la precipitazione è pronta a tutte le concentrazioni.

[1] *Lezioni*, vol. II, § 391.

[2] V. p. 420.