ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *I problemi di riduzione per le forme differenziali risoluti con metodo diretto.* Nota IX del Corrispondente Ernesto Pascal [1].

Abbiamo già detto nell'introduzione alla Nota VI, che, prima di terminare queste ricerche, avremmo anche risoluto i problemi di riduzione con metodo più diretto, e propriamente con metodo non fondato sulla teoria delle trasformazioni infinitesime, come è quello finora adoperato. È a questa promessa che ci proponiamo ora di soddisfare. E tanto più ci piace di passare alla trattazione di quest'altro metodo, in quanto esso può anche rappresentare una importante applicazione delle varie formole fin qui stabilite, e il procedimento che con esso si viene a seguire ha un aspetto di notevole eleganza e semplicità.

È da osservare però che noi intendiamo limitarci solo ad alcuni rapidi cenni, giacchè per il resto possono largamente supplire gli sviluppi dati nelle precedenti Note, a cui continuamente ci riferiremo.

1. Cominceremo dal primo problema.

Supponiamo che con una trasformazione delle x nelle y, la $X^{(r)}$ si muti in $Y^{(r)} = \sigma T^{(r)}$ dove $T^{(r)}$ non contenga la variabile y_n.

Dovrà aversi

$$Y_{nj_1 \dots j_s} = 0 \qquad (s = 0 \,, \dots r-1) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \frac{Y_{i_1 \cdots i_\nu}}{Y_{j_1 \cdots j_\rho}} = 0 \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{1}{Y_{i_1 \cdots i_\nu}} \frac{\partial Y_{i_1 \cdots i_\nu}}{\partial y_n} = \frac{1}{Y_{j_1 \cdots j_\rho}} \frac{\partial Y_{j_1 \cdots j_\rho}}{\partial y_n} = \mu$$

$$\frac{\partial Y_{j_1 \cdots j_\rho}}{\partial y_n} = \mu \, Y_{j_1 \cdots j_\rho} \tag{3}$$

nella quale ultima formola deve intendersi che μ sia una funzione delle variabili che non cambii col mutare degli indici $j_1 \dots j_\rho$ e col mutare di ρ.

Intendiamo ora calcolato il simbolo principale di 1ª specie $(j_1 \dots j_\rho \, n)$ relativo alla $Y^{(r)}$, e osserviamo che essendo

$$(j_1 \dots j_\rho \, n) = ((j_1 \dots j_\rho \,, n)) + (-1)^\rho ((n \,, j_1 \dots j_\rho))$$

ed essendo, per effetto di (1), sempre zero il secondo termine, perchè tutti i suoi termini contengono sempre una Y di cui uno degli indici è n, ed il primo termine per le medesime (1) riducendosi al solo primo membro di (3),

[1] Presentata nella seduta del 6 dicembre 1903.

si ha semplicemente:

$$(j_1 \dots j_\rho\, n)_Y = \frac{\partial Y_{j_1 \cdots j_\rho}}{\partial y_n} \tag{4}$$

e quindi

$$(j_1 \dots j_\rho\, n)_Y = \mu\, Y_{j_1 \cdots j_\rho}\,. \tag{5}$$

Sostituiamo ora ad ambo i termini di questa relazione i loro valori dati rispettivamente dalla formola (18) della Nota II e (7) della Nota I. Si ha:

$$\sum_i \binom{i}{n}_{xy} \sum_h \left[(h_1 \dots h_\rho\, i)_X \binom{h_1 \dots h_\rho}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + \{h_1 \dots h_{\rho-1}\, i\}_X \binom{h_1 \dots h_{\rho-1}}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + \cdots \right] = \tag{6}$$

$$= \mu \sum_h \left[X_{h_1 \cdots h_\rho} \binom{h_1 \dots h_\rho}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + X_{h_1 \cdots h_{\rho-1}} \binom{h_1 \dots h_{\rho-1}}{j_1 \dots j_\rho}_{xy} + \cdots \right].$$

Dovendo questa relazione sussistere identicamente, saranno eguali, al primo e secondo membro, i coefficienti delle medesime combinazioni di derivate delle x rispetto alle y, cioè delle medesime $\binom{h_1 \dots h_s}{j_1 \dots j_\rho}_{xy}$; abbiamo perciò le equazioni $\left(\text{sostituendo a } \binom{i}{n}_{xy} \text{ il suo valore } \frac{\partial x_i}{\partial y_n}\right)$

$$\begin{gathered} \sum_i (h_1 \dots h_\rho\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \mu\, X_{h_1 \cdots h_\rho} \\ \sum_i \{h_1 \dots h_{\rho-1}\, i\}_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \mu\, X_{h_1 \cdots h_{\rho-1}} \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{7}$$

Queste equazioni devono verificarsi per *qualunque* ϱ da 1 sino a r; quindi in conclusione possiamo dire che le derivate delle x rispetto alla y_n devono soddisfare le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_i (h_1 \dots h_\rho\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \mu\, X_{h_1 \cdots h_\rho}\,, \quad (\varrho = 1\,, 2\,, \dots r) \\ &\sum_i \{h_1 \dots h_\rho\, i\}_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \mu\, X_{h_1 \cdots h_\rho}\,, \quad (\varrho = 1\,, 2 \dots r-1) \end{aligned} \right. \tag{8}$$

alle quali bisogna poi aggregare un' ultima che si deduce da quella fra le (1) di cui non abbiamo ancora tenuto conto, cioè della $Y_n = 0$, il che dà

$$\sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0\,. \tag{9}$$

Per la risolubilità del problema deve dunque essere zero la matrice delle equazioni lineari (8) *e* (9), *cioè*

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{M} + \sum_{\rho=1}^{r-1} \left[(\mathrm{M})_\rho + \}\mathrm{M}\{_\rho \right] + (\mathrm{M})_r$$

e si ha così il risultato già da noi ottenuto nel paragrafo 1 della Nota VI.

La anzidetta condizione è anche sufficiente. Infatti soddisfatta tale condizione, le (8) (9) sono compatibili, e può trovarsi almeno un sistema di valori per le derivate $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$. *Ammettiamo per un momento che possa trovarsi una trasformazione delle x nelle y tale che le derivate di x_i rispetto ad y_n abbiano i trovati valori.* Facciamo vedere che allora restano soddisfatte le (1) (2). In primo luogo dalla (9) si deduce $\mathrm{Y}_n = 0$. Inoltre sottragghiamo le due (8) coi medesimi indici, e otteniamo

$$\sum_i ((i\,, h_1 \dots h_\rho))_{\mathrm{X}} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \qquad (\rho = 1\,, 2\,, \dots r-1)$$

e moltiplicando per

$$\begin{pmatrix} h_1 \dots h_\rho \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}_{xy} \qquad (\rho \leq s \leq r-1)\,,$$

e indi sommando da $\rho = 1$ sino a $\rho = s$ e per tutti i possibili valori delle h, si ha:

$$\sum_{\rho=1}^{s} \sum_i \sum_h ((i\,, h_1 \dots h_\rho))_{\mathrm{X}} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \begin{pmatrix} h_1 \dots h_\rho \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}_{xy} = 0$$

che, per effetto di una formola della Nota II, non è altro che

$$\text{(11)} \qquad ((n\,, j_1 \dots j_s))_{\mathrm{Y}} = 0.$$

Si ha dunque che, soddisfatte le (8), sono zero tutte le (11) per ogni s da 1 ad $r-1$.

Per $s = 1$ si ha $((n\,, j))_{\mathrm{Y}} = 0$, ed essendo $\mathrm{Y}_n = 0$ sarà $\mathrm{Y}_{nj} = 0$. Per $s = 2$ si ha $((n\,, j_1\, j_2)) = 0$ ed essendo già $\mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_{nj_1} = \mathrm{Y}_{nj_2} = 0$ si ha $\mathrm{Y}_{nj_1 j_2} = 0$; così seguitando, si vede che soddisfatte le (8) (9) restano soddisfatte tutte le (1).

Soddisfatte queste, lo sono le (4), e quindi, ricavandosi dalla sussistenza delle (8) quella delle (5), ne risulta la sussistenza di (3) e perciò di (2).

Vediamo ora come si trova la trasformazione delle x nelle y che risolve il problema, e la cui esistenza abbiamo ammessa di sopra.

Se la matrice (10) è zero, le equazioni (8) (9) ammettono una soluzione comune che chiameremo

$$\xi_1 \ldots \xi_n \, \mu ,$$

e formiamo l'equazione a derivate parziali

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{12}$$

che avrà $n-1$ integrali indipendenti

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1 \,, \ldots , n-1) \tag{13}$$

a cui, al solito, aggregheremo una nuova funzione arbitraria, ma indipendente dalle precedenti:

$$y_n = \varphi_n(x) \,. \tag{14}$$

La trasformazione (13) (14) *risolve il problema, e ogni trasformazione che risolve il problema è di questo tipo.* Infatti si sa che i differenziali delle x ricavati dalle (13) e considerandovi $y_1 \ldots y_{n-1}$ come *costanti*, sono proporzionali a $\xi_1 \ldots \xi_n$ che sono i coefficienti di (12); d'altra parte considerando le x funzioni delle y, le derivate parziali $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ sono proprio i *rapporti* dei differenziali di x_i presi nell'ipotesi che $y_1 \ldots y_{n-1}$ siano costanti, pel differenziale di y_n, dunque tali derivate parziali sono proporzionali alle ξ:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_n} = \tau \, \xi_i \tag{15}$$

e soddisfanno perciò alle (8) (9) con un valore diverso per l'incognita μ. Di qui si deduce, come sopra, che sono soddisfatte le (1) (2) e quindi è risoluto il problema.

Viceversa, risoluto il problema, le derivate $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ devono soddisfare alle (8) (9), e quindi, conservando per le ξ il precedente significato, saranno soddisfatte le (15), cioè i differenziali di $x_1 \ldots x_n$, nell'ipotesi di $y_1 \ldots y_{n-1}$ *costanti*, saranno proporzionali alle $\xi_1 \ldots \xi_n$, e perciò, risolvendo le supposte formole di trasformazione rispetto alle $y_1 \ldots y_n$, le $y_1 \ldots y_{n-1}$ soddisferanno alla equazione a derivate parziali (12).

Come si vede, abbiamo così ritrovato in tutte le sue parti principali, il risultato del paragrafo 1 della Nota VI, che contiene però, in più, il significato elegante e degno di nota, del primo membro della equazione (12), e cioè che tal primo membro rappresenta una trasformazione infinitesima che lascia invariata $X^{(r)} = 0$, e per cui sono zero l'invariante $\varDelta$ e il covariante $C^{(r-1)}$.

2. Passiamo ora al secondo problema.

Supponiamo che sia

$$Y^{(r)} = T^{(r)} + Z^{(r)} \tag{16}$$

dove $T^{(r)}$ non contenga y_n, e $Z^{(r)}$ sia un differenziale canonico. Ricordando quanto abbiamo dimostrato nel paragrafo 2 della Nota VII, che cioè per un differenziale canonico $Z^{(r)}$ sono zero gli elementi delle matrici

$$(M')_r \,,\, \}M'\{_{r-1} \,, \ldots\ldots$$

si ha che, in particolare, saranno zero per $Z^{(r)}$ i simboli

$$(j_1 \ldots j_r\, n) \,,\, \}j_1 \ldots j_{r-1}\, n\{ \,, \ldots\ldots$$

e poichè questi simboli sono anche zero per $T^{(r)}$ perchè uno dei loro indici è sempre n, così si vede che essi saranno zero per le Y, cioè si avrà

$$(j_1 \ldots j_r\, n)_Y = 0 \,,\, \}j_1 \ldots j_{r-1}\, n\{_Y = 0 \,, \ldots\ldots \tag{17}$$

Vediamo ora come da queste relazioni possano ricavarsi delle equazioni lineari cui soddisfanno le derivate di $x_1 \ldots x_n$ rispetto ad y_n.

Consideriamo una delle equazioni (17), p. es.

$$(j_1 \ldots j_s\, n)_Y = 0 \qquad (s = r \,,\, r-2 \,,\, r-4 \,, \ldots..) \tag{18}$$

e applichiamo al primo membro la formola (18) del paragrafo 4 della Nota II, che dà la espressione del simbolo in Y mediante simboli in X. Si ha

$$\begin{aligned}(j_1 \ldots j_s\, n)_Y = \sum_h \left[\sum_i (h_1 \ldots h_s\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \begin{pmatrix} h_1 \ldots h_s \\ j_1 \ldots j_s \end{pmatrix}_{xy} + \\ + \sum_h \left[\sum_i \}h_1 \ldots h_{s-1}\, i\{_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \begin{pmatrix} h_1 \ldots h_{s-1} \\ j_1 \ldots j_s \end{pmatrix}_{xy} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 .\end{aligned} \tag{19}$$

Supponiamo ora che si sia già dimostrato che dalle (17) risultano le equazioni

$$\begin{cases} \sum_i \}h_1 \ldots h_{s-1}\, i\{_X \dfrac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \sum_i (h_1 \ldots h_{s-2}\, i)_X \dfrac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \vdots \end{cases} \tag{20}$$

dalla (19) risulta allora

$$\sum_h \left[\sum_i (h_1 \dots h_s\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \begin{pmatrix} h_1 \dots h_s \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}_{xy} = 0. \tag{21}$$

Ma osserviamo che

$$\begin{pmatrix} h_1 \dots h_s \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}_{xy} = \frac{\partial x_{h_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial x_{h_s}}{\partial y_{j_s}}$$

e nelle (21) cominciamo col far variare l'indice j_s da 1 ad n. Si ha allora un sistema di n equazioni lineari che potremo scrivere:

$$\sum_{h_s=1}^{n} \left[\sum_h \sum_i (h_1 \dots h_s\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \begin{pmatrix} h_1 \dots h_{s-1} \\ j_1 \dots j_{s-1} \end{pmatrix}_{xy} \right] \frac{\partial x_{h_s}}{\partial y_{j_s}} = 0$$

$$(j_s = 1, 2, \dots n).$$

Poichè il determinante funzionale delle x rispetto alle y deve essere naturalmente diverso da zero, risulta di qui l'annullarsi identico di tutte le quantità racchiuse in parentesi quadra; si ha così una nuova equazione che può trattarsi collo stesso procedimento, finchè abbiamo infine

$$\sum_i (h_1 \dots h_s\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0. \tag{22}$$

Dunque dalla sussistenza delle (20) sino all'indice $s-1$ ne risulta la sussistenza della seguente per l'indice seguente s. Lo stesso si avrebbe se invece di considerare un simbolo di prima specie (18) se ne considerasse uno di seconda, e nelle equazioni (20) si scambiassero fra loro i simboli di prima specie con quelli di seconda specie. Intanto il caso di $s-1=1$ può provarsi direttamente, e da esso resta dunque dimostrato per induzione la sussistenza di tutte le (20).

Infatti, secondochè r è pari o dispari l'ultima delle (17) è $\}j\, n\{_Y = 0$ ovvero $(j\, n)_Y = 0$, e queste trasformate nelle X diventano

$$\sum_h \left[\sum_i \}h\, i\{_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \frac{\partial x_h}{\partial y_j} = 0$$

ovvero rispettivamente

$$\sum_h \left[\sum_i (h\, i)_X \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \frac{\partial x_h}{\partial y_j} = 0$$

e da queste col medesimo metodo di sopra, cioè facendo variare j e considerando il sistema delle n equazioni lineari omogenee delle quali il determinante dei coefficienti è il determinante funzionale delle x rispetto alle y, si deduce (se r è pari):

$$\sum_i \} h\, i \{_{\mathrm{x}} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \tag{23}$$

ovvero (se r è dispari):

$$\sum_i (h\, i)_{\mathrm{x}} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0\,. \tag{24}$$

Ricaviamo dunque dalla sussistenza delle (17), quella delle equazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i (h_1 \dots h_r\, i)_{\mathrm{x}} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \sum_i \} h_1 \dots h_{r-1}\, i \{_{\mathrm{x}} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right. \tag{25}$$

di cui l'ultima è la (23) se r è pari, ed è la (24) se r è dispari.

Per la risolubilità del problema deve dunque essere zero la matrice delle equazioni lineari (25), *cioè*

$$(\mathrm{M}')_r + \}\mathrm{M}'\{_{r-1} + \cdots\cdots \tag{26}$$

e questo è il risultato ottenuto nel paragrafo 4 della Nota VII e nel paragrafo 1 della Nota VIII.

Può dimostrarsi che la anzidetta condizione è anche sufficiente, e può contemporaneamente trovarsi anche il modo per costruire la *più generale* trasformazione finita che effettua la riduzione.

Se infatti la matrice (26) è zero, le equazioni (25), considerandovi come incognite le $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$, ammettono almeno una soluzione comune $\xi_1 \dots \xi_n$, e formando

$$\sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{27}$$

e chiamando

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1\,, 2\,, \dots n-1) \tag{28}$$

gli integrali di questa, e aggregando arbitrariamente una

$$y_n = \varphi_n(x) \tag{29}$$

che sia indipendente dalle precedenti, si dimostra, come nel paragrafo 1, che le derivate $\frac{\partial x_i}{\partial y_n}$ ricavate da (28) (29) soddisfanno alle (25). Per effetto della (19) e di quella analoga in cui il primo membro sia un simbolo principale di seconda specie, restano dunque soddisfatte tutte le (17), e quindi ripetendo allora il medesimo ragionamento fatto sulle formole (19) del paragrafo 4 della Nota VII, se r è pari, o sulle formole (3) del paragrafo 1 della Nota VIII se r è dispari, si giunge a mostrare che resta risoluto il problema di riduzione, cioè che sussiste la (16).

Resta a mostrare che la soluzione così trovata è *la più generale possibile*, cioè, in termini più precisi, che ogni trasformazione che effettua la desiderata riduzione deve potersi trovare col procedimento indicato. Ed infatti se le derivate parziali di $x_1 \dots x_n$ rispetto ad y_n soddisfanno le (25), conservando per le ξ lo stesso significato che sopra, i differenziali $dx_1 \dots dx_n$ presi nell'ipotesi di $y_1 \dots y_{n-1}$ *costanti*, cioè, in sostanza, le predette derivate parziali moltiplicate per dy_n, devono essere proporzionali alle $\xi_1 \dots \xi_n$. Ciò mostra che, formate le (28), le funzioni φ devono essere $n-1$ integrali indipendenti della equazione a derivate parziali (27).

Collo stesso metodo potrebbe anche trattarsi il problema di trasformare $X^{(r)}$ in una forma con una variabile di meno, più un differenziale r^{mo} esatto, problema di cui abbiamo trattato, col metodo delle trasformazioni infinitesime, nel paragrafo 2 della Nota VIII; ma su ciò non crediamo necessario indugiare [1].

[1] Terminando con questa la serie delle Note sulle forme differenziali che mi era proposto di pubblicare in quest'anno in questi Rendiconti, prendo l'occasione per rilevare quegli errori di stampa di cui mi sono accorto rileggendo le Note precedenti, e dei quali del resto un lettore attento può facilmente accorgersi da sè stesso. Essi sono:

Nota I,	1° sem.	pag. 329, form. (16):	δp	leggi:	$d\delta$
»	»	pag. 330, form. (19):	$\binom{r}{\varrho}$	»	$\binom{r}{p}$
»	»	» »	$d^{r-\rho}\varphi$	»	$d^{r-p}\varphi$
»	»	» »	al secondo membro manca		$\sum_j \sum_i$
»	»	pag. 332, form. (24):	$d^r \xi_{j_m}$	leggi:	$d^k \xi_{j_m}$
Nota II,	»	pag. 374, 2ª riga della form. (13):	$\sum_{s=1}^{\sigma}$	»	$\sum_{s=2}^{\sigma}$
»	»	» riga 7ª:	$\binom{i_m}{k}$	»	$\binom{j_m}{k}$
»	»	» form. (16):	$\sum_{s=2}^{\sigma-1}$	»	$\sum_{s=2}^{\sigma+1}$
Nota III,	»	pag. 407, ultima riga:	$\lbrace j_1 \dots j_{\rho-2} \rbrace$	»	$\lbrace j_1 \dots j_{\rho-2}\, i \rbrace$.
Nota V,	2° sem.	pag. 181, riga 22:	∞^{σ}	»	$\infty^{n+1-\sigma}$.

Ricordo inoltre che come continuazione di queste ricerche è anche da considerarsi l'altra Nota da me pubblicata recentemente nei Rend. dell'Ist. Lomb. ((2), t. XXXVI, 1903, pp. 978-985) e intitolata: *Sulle forme differenziali omogenee di ordine superiore.*