ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Fisica-matematica. — *Sulla legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di due cariche elettriche in movimento*. Nota II[1] di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

4. Supponiamo che la distanza, che ora indicheremo con d, delle due cariche m, m_1, rimanga costante durante il movimento delle cariche stesse, e troviamo in questo caso l'espressione della forza elettrica esercitata da m sopra m_1.

Conviene, per questo, partire dalle (12) invece che dalle (14); osservando che dalle (13″) risulta:

$$rr'' - 2r'^2 = (r'^2 + rr'') - 3r'^2 = v^2 - da\cos(d,a) - 3v^2\cos^2(d,v),$$

si ha dalle (12):

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{mm_1}{d^2}\frac{x-\varphi}{d} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2}\mathrm{A}^2\left[v^2 - da\cos(d,a) - 3v^2\cos^2(d,v)\right]\frac{x-\varphi}{d} - \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2\varphi'' \\ \mathrm{Y} &= \frac{mm_1}{d^2}\frac{y-\psi}{d} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2}\mathrm{A}^2\left[v^2 - da\cos(d,a) - 3v^2\cos^2(d,v)\right]\frac{y-\psi}{d} - \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2\psi'' \\ \mathrm{Z} &= \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

la direzione positiva di d essendo quella che va da m ad m_1.

In queste formole figurano solo la velocità v e l'accelerazione a (colle sue componenti φ'', ψ'', χ'') di m; esse si otterrebbero pure dalle formole generali (14) tenendo conto delle note relazioni che sussistono fra le velocità ed accelerazioni di due punti mobili, la cui distanza è costante.

Trasformiamo le (15). Consideriamo perciò una terna di assi mobili ξ, η, ζ rigidamente collegata colle due cariche m, m_1; supponiamo che l'origine Ω di questa terna sia il punto medio del segmento mm_1, e che la direzione positiva dell'asse ξ sia quella che va da m ad m_1, in modo che per le coordinate delle due cariche si abbia:

$$m\left(-\frac{1}{2}d, 0, 0\right), \quad m_1\left(\frac{1}{2}d, 0, 0\right).$$

[1] V. pag. 14.

Allora se v_ξ, v_η, v_ζ ; a_ξ, a_η, a_ζ sono rispettivamente le componenti della velocità v ed accelerazione a di m rispetto agli assi ξ, η, ζ, si ha:

$$v \cos(d, v) = v_\xi \quad , \quad a \cos(d, a) = a_\xi ,$$

quindi indicando con $\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Z}$ le componenti, secondo gli assi ξ, η, ζ, della forza elettrica esercitata da m sopra m_1, si ha, dalle (15):

$$\text{(16)} \quad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\Xi} &= \frac{mm_1}{d^2} + \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2} \mathrm{A}^2 (v^2 - 3v^2_\xi - 2d\, a_\xi) \\ \boldsymbol{H} &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d} \mathrm{A}^2 a_\eta \\ \boldsymbol{Z} &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d} \mathrm{A}^2 a_\zeta . \end{aligned} \right.$$

Se ora si indicano, secondo il solito, con u, v, w le componenti, secondo gli assi ξ, η, ζ della velocità dell'origine Ω, e con p, q, r le componenti, secondo gli stessi assi, della velocità angolare, si ha, come è ben noto, per le componenti $\mathrm{V}_\xi, \mathrm{V}_\eta, \mathrm{V}_\zeta$ della velocità di un punto generico (ξ, η, ζ) rigidamente collegato coi detti assi:

$$\text{(17)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{V}_\xi &= u + q\zeta - r\eta \\ \mathrm{V}_\eta &= v + r\xi - p\zeta \\ \mathrm{V}_\zeta &= w + p\eta - q\xi , \end{aligned} \right.$$

e per le componenti $\mathrm{A}_\xi, \mathrm{A}_\eta, \mathrm{A}_\zeta$ dell'accelerazione:

$$\text{(17')} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_\xi &= \frac{d\mathrm{V}_\xi}{dt} + q\mathrm{V}_\zeta - r\mathrm{V}_\eta \\ \mathrm{A}_\eta &= \frac{d\mathrm{V}_\eta}{dt} + r\mathrm{V}_\xi - p\mathrm{V}_\zeta \\ \mathrm{A}_\zeta &= \frac{d\mathrm{V}_\zeta}{dt} + p\mathrm{V}_\eta - q\mathrm{V}_\xi ; \end{aligned} \right.$$

applicando, in particolare, queste formole al punto $m\left(-\frac{1}{2}d, 0, 0\right)$, e ponendo, ove ci farà comodo, $\delta = \frac{1}{2}d$, si ha:

$$\begin{aligned} v_\xi = u , \quad v_\eta &= v - r\delta , \quad v_\zeta = w + q\delta , \\ a_\xi &= u' + qw - rv + (q^2 + r^2)\,\delta \\ a_\eta &= v' - r'\delta + ru - pw - pq\delta \\ a_\zeta &= w' + q'\delta + pv - qu - pr\delta ; \end{aligned}$$

sostituendo nelle (16) risulta:

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\Xi &= \frac{mm_1}{d^2} + \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2}\mathrm{A}^2[v^2+w^2-2u^2-(qw-rv)d-3(q^2+r^2)\delta^2-2u'd] \\
H &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2[ru-pw-pq\delta+v'-r'\delta] \\
Z &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2[pv-qu-pr\delta+w'+q'\delta].
\end{aligned}\right.
$$

Queste formole esprimono l'azione di m sopra m_1; quelle invece che dànno l'azione di m_1 sopra m, sono, come è facile verificare:

$$
(18_1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Xi_1 &= -\frac{mm_1}{d^2} - \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2}\mathrm{A}^2[v^2+w^2-2u^2+(qw-rv)d-3(q^2+r^2)\delta^2+2u'd] \\
H_1 &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2[ru-pw+pq\delta+v'+r'\delta] \\
Z_1 &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2[pv-qu+pr\delta+w'-q'\delta].
\end{aligned}\right.
$$

Così abbiamo le componenti della forza elettrica esercitata da m sopra m_1, o da m_1 sopra m, espresse in funzione delle caratteristiche u, v, w, p, q, r (e loro derivate) del moto della coppia rigida mm_1.

5. Applichiamo le (18), (18₁) in qualche caso particolare.

Supponiamo dapprima che il moto della coppia (rigida) mm_1 sia soltanto traslatorio; allora dalle (18) si deduce:

$$
\left\{\begin{aligned}
\Xi &= \frac{mm_1}{d^2} + \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2}\mathrm{A}^2(v^2+w^2-2u^2-2u'd) \\
H &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2 v' \\
Z &= -\frac{1}{2}\frac{mm_1}{d}\mathrm{A}^2 w'
\end{aligned}\right.
$$

e, se la traslazione è uniforme:

$$
\left\{\begin{aligned}
\Xi &= \frac{mm_1}{d^2} + \frac{1}{2}\frac{mm_1}{d^2}\mathrm{A}^2(v^2+w^2-2u^2) \\
H &= 0\,,\quad Z = 0\,;
\end{aligned}\right.
$$

in quest'ultimo caso la forza esercitata da m su m_1 ha la direzione mm_1; ed inoltre, come risulta dalle (18_1), è eguale e contraria a quella esercitata da m_1 sopra m, cioè sussiste il principio della reazione opposta all'azione.

Supponiamo ora invece che il moto della coppia mm_1 sia soltanto rotatorio; allora si ha, dalle (18):

$$\left\{\begin{aligned} \Xi &= \frac{mm_1}{d^2} - \frac{3}{8}\, mm_1\, A^2 (q^2 + r^2) \\ H &= \frac{1}{4}\, mm_1\, A^2 (pq + r') \\ Z &= \frac{1}{4}\, mm_1\, A^2 (pr - q'); \end{aligned}\right.$$

si vede pertanto che, oltre al termine $\frac{mm_1}{d^2}$ esprimente la legge di Coulomb, vi ha un termine complementare, *che non dipende però dalla distanza* d *delle due cariche*; di più, come risulta dalle (18_1), la reazione è opposta all' azione.

Se poi la rotazione avviene attorno all' asse $\Omega\zeta$ ed è uniforme, si ha:

$$(18') \quad \left\{\begin{aligned} \Xi &= \frac{mm_1}{d^2} - \frac{3}{8}\, mm_1\, A^2 \omega^2 \\ H &= 0 \\ Z &= 0\,, \end{aligned}\right.$$

ω indicando la velocità angolare. Si riconosce perciò che in questo caso la forza elettrica ha la direzione mm_1; inoltre il termine complementare $-\frac{3}{8}\, mm_1\, A^2 \omega^2$ è indipendente da d ed è proporzionale al quadrato della velocità angolare ω.

Questa velocità però non può essere grande ad arbitrio, perchè, secondo quanto si disse a § 1, la velocità di m deve sempre rimanere inferiore alla velocità $\frac{1}{A}$ della luce, cioè dev' essere soddisfatta la diseguaglianza:

$$\frac{1}{2}\, d\omega < \frac{1}{A}\,,$$

ossia:

$$\omega < \frac{2}{dA}\,.$$

A questo proposito è forse interessante mostrare che, per una conveniente velocità angolare ω, inferiore al limite ora trovato, la componente Ξ data dalla (18') si annulla; basta infatti assumere:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{2}{dA},$$

(valore evidentemente minore di $\frac{2}{dA}$) e allora si ha senz' altro $\Xi = 0$.

Per tale velocità angolare non si esercita dunque alcuna azione fra le due cariche, e per una velocità angolare un po' maggiore la forza elettrica da ripulsiva diventa attrattiva, e viceversa.

Si conclude pertanto che il moto rotatorio delle due cariche esercita un'influenza, in generale assai sensibile e diminutiva, sulla forza elettrica esercitata fra le due masse.

6. È facile estendere le (18') al caso in cui la rotazione uniforme avviene attorno ad un punto qualunque del segmento mm_1, anzichè attorno al punto medio.

Sia perciò Ω_0 un punto qualunque di mm_1, e diciamo α_0 la sua distanza da m; assumiamo poi una terna di assi ξ_0, η_0, ζ_0 paralleli rispettivamente a ξ, η, ζ e di origine Ω_0; le coordinate di m rispetto a questa nuova terna saranno $(-\alpha_0, 0, 0)$; allora se ω è la velocità angolare costante di rotazione attorno all'asse $\Omega_0\zeta_0$, da formole analoghe alle (17), (17') si ha, per le componenti della velocità ed accelerazione di m rispetto agli assi ξ_0, η_0, ζ_0:

$$v_{\xi_0} = 0, \quad v_{\eta_0} = -\omega\alpha_0, \quad v_{\zeta_0} = 0$$
$$a_{\xi_0} = \omega^2\alpha_0, \quad a_{\eta_0} = 0, \quad a_{\zeta_0} = 0.$$

Sostituendo nelle (16) si ha:

$$\begin{cases} \Xi = \dfrac{mm_1}{d^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{mm_1}{d^2}\,\mathrm{A}^2\,(\omega^2\alpha^2{}_0 - 2d\,\omega^2\,\alpha_0) \\ H = 0 \;,\; Z = 0\,; \end{cases}$$

ponendo:

$$\lambda = \frac{\alpha_0}{d},$$

si può ancora scrivere:

$$\text{(19)} \quad \begin{cases} \Xi = \dfrac{mm_1}{d^2} + \dfrac{1}{2}\,mm_1\,\mathrm{A}^2\,\lambda(\lambda - 2)\,\omega^2 \\ H = 0 \\ Z = 0\,; \end{cases}$$

queste sono le formole cercate. Essendo λ una quantità puramente numerica (indipendente quindi da d) risulta che *anche in questo caso più generale il termine complementare è indipendente da d, ed è proporzionale al quadrato ω^2 della velocità angolare.*

Per ottenere l'azione di m_1 sopra m bisogna cambiare nelle (19) α_0 in $d - \alpha_0$, cioè λ in $1 - \lambda$, e poi cambiare i segni nel 2° membro, e si ha così:

$$\text{(19}_1\text{)} \quad \begin{cases} \Xi_1 = -\dfrac{mm_1}{d^2} + \dfrac{1}{2}\,mm_1\,\mathrm{A}^2\,(1 - \lambda^2)\,\omega^2 \\ H_1 = 0 \\ Z_1 = 0 \end{cases}$$

Le formole (19), (19_1) servono per determinare le eventuali azioni elettriche fra due corpi celesti (Sole e Terra, per es.), sensibilmente ruotanti attorno al loro comune centro di gravità; in questo caso il punto Ω_0 non sarebbe dunque altro che il centro di gravità di m ed m_1.

Se $\lambda = 0$, cioè se m è in quiete, il termine complementare nelle (19) si annulla, e allora rimane il solo termine dato dalla legge di Coulomb; invece nelle (19_1) il termine complementare assume il valore $\frac{1}{2} m m_1 A^2 \omega^2$. Accade il contrario se $\lambda = 1$, cioè se m_1 è in quiete. Per $\lambda = \frac{1}{2}$ si ritrovano le (18').

Osservazione. — Le formole generali (18), (18_1) possono servire per calcolare l'azione che si esercita fra due cariche elettriche in quiete alla superficie terrestre, e trascinate nel moto generale della Terra. Basterebbe perciò assumere come assi ξ, η, ζ tre assi fissi nella Terra (ad es. due sull'equatore, e il terzo sull'asse polare) e ritenere il moto di questi assi come costituito di una traslazione sensibilmente uniforme (con velocità di circa 30 km. al secondo), e di una rotazione pure uniforme (un giro in 24 ore) attorno all'asse polare.

Senonchè il mezzo in cui si studia la propagazione delle azioni (a distanza) fra le due cariche è l'aria, che ruota essa pure col globo; bisogna pertanto conoscere l'influenza di tale mezzo sulla propagazione delle azioni elettromagnetiche tra le due cariche. Questa influenza si potrebbe determinare applicando una delle note teorie di Hertz, Lorentz, Larmor, ecc.; oppure si potrebbe fare senz'altro l'ipotesi, a priori possibile, ma forse non attendibile (perchè contraria, in particolare, alla teoria di Hertz), che il moto della materia, come tale (in quanto cioè non è in pari tempo moto convettivo di elettricità) non esercita influenza alcuna. Ammettendo quest'ipotesi le (18), (18_1) permettono, come si disse, di determinare la forza elettrica che si esercita fra le cariche considerate.

Conviene ancora notare che i calcoli stabiliti a § 5 sussistono inalterati anche se le due cariche rotano alla superficie terrestre; perchè è chiaro che la rotazione terrestre non può esercitare che un'influenza secondaria, che può quindi ritenersi trascurabile. In tal caso l'ambiente (aria) in cui avviene il moto è allora in quiete, e pertanto non esercita influenza di sorta. Lo stesso dicasi dell'applicazione fatta nel § 6 alle eventuali azioni elettriche di due corpi celesti: l'ambiente interposto è l'etere, essenzialmente in quiete.