ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Meccanica. — *Sul problema dei tre corpi. Condizioni d'urto di due di essi.* Nota del dott. GIULIO BISCONCINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

Nella presente Nota ci proponiamo di esporre i risultati di un lavoro, che fu ispirato da una Memoria del prof. Levi-Civita [2].

In essa l'autore prende a considerare il moto piano di un punto di massa trascurabile attratto da due punti di masse finite, studia le traiettorie lungo le quali avviene od è avvenuto un urto con uno dei centri di attrazione, e determina la condizione affinchè ciò avvenga.

Lo scopo della nostra ricerca, per la quale in buona parte ci sono state utili le considerazioni svolte dal Levi-Civita, è stato, come avverte il titolo stesso della Nota, lo studio dell'analogo problema nel caso generale; la determinazione cioè delle condizioni, sotto le quali due dei tre corpi devono urtarsi.

1. Dati i tre punti P_0, P_1, P_2 di masse rispettive m_0, m_1, m_2, si consideri il moto di P_1, P_2 rispetto a una terna d'assi x, y, z di orientazione costante coll'origine in P_0 e si indichino con x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 le coordinate di questi punti rispetto alla terna di riferimento, con p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2 le componenti delle loro quantità di moto assolute. È noto allora che le equazioni canoniche del moto relativo di P_1 e P_2 sono:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q_i}, & \dfrac{dz_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial r_i}, \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & \dfrac{dr_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial z_i}; \end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

avendo posto:

$$(2)\quad H = K - U = \tfrac{1}{2} \left\{ \sum_1^2{}_i\, \mu_i (p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) + \frac{1}{m_0}(p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) \right\} - \\ - \left\{ m_0 \sum_1^2{}_i \frac{m_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} + \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right\}$$

in cui s'è scritto μ_i invece di $\dfrac{1}{m_i} + \dfrac{1}{m_0}$ [3].

[1] Presentata nella seduta del 22 novembre 1903.

[2] *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* Annali di Matematica. T. IX, serie III.

[3] Senza togliere nulla alla generalità della questione abbiamo ammesso:

a) disponendo delle costanti delle quantità di moto che il centro di gravità del sistema sia fisso,

b) disponendo dell'unità di tempo, che la costante di attrazione universale si riduca uguale all'unità.

Si sostituiscano ora alle quantità di moto del punto P_1 le componenti della sua velocità relativa mediante le formule:

$$x'_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \mu_1 p_1 + \frac{p_2}{m_0},$$
$$y'_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \mu_1 q_1 + \frac{q_2}{m_0},$$
$$z'_1 = \frac{\partial H}{\partial r_1} = \mu_1 r_1 + \frac{r_2}{m_0}.$$

Il sistema, in virtù di questa trasformazione, non mantiene la forma canonica, ma possiamo però attribuirgli forma semicanonica ponendo:

$$\overline{H}_1 = \tfrac{1}{2}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) - \mu_1 U - m_2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\varrho_2^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta}$$
$$\overline{H}_2 = \tfrac{1}{2}\nu_2 (p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - U + \frac{1}{m_0 \mu_1}(x'_1 p_2 + y'_1 q_2 + z'_1 r_2),$$

con ϱ_2 e Δ indicando rispettivamente

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\ , \ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

e avendo scritto ν_2 invece di $\mu_2 + \frac{1}{\mu_1 m_0^2}$.

Le (1) diventano allora:

$$(1')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial x'_1} \text{ ecc.}, \\ \frac{dx'_1}{dt} &= -\frac{\partial \overline{H}_1}{\partial x_1} \text{ ecc.}, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial \overline{H}_2}{\partial p_2} \text{ ecc.}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial \overline{H}_2}{\partial x_2} \text{ ecc.} \end{aligned} \right.$$

Sostituendo infine alle coordinate e alle componenti della velocità relativa del primo punto le sue coordinate polari $\varrho_1, \vartheta_1, \varphi_1$ e le loro coniugate P_1, Θ_1, Φ_1 mediante le formule:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 \cos \varphi_1 , \\ y_1 &= \varrho_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 \operatorname{sen} \varphi_1 , \\ z_1 &= \varrho_1 \cos \vartheta_1 , \end{aligned} \right. \\ &\left\{ \begin{aligned} P_1 &= x'_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y'_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + z'_1 \cos \vartheta_1 , \\ \Theta_1 &= \varrho_1 (x'_1 \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 + y'_1 \cos \vartheta_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + z'_1 \operatorname{sen} \vartheta_1), \\ \Phi_1 &= \varrho_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 (-x'_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + y'_1 \cos \varphi_1) , \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

e indicando con H_1 e H_2 ciò che diventano $\overline{H}_1$ e $\overline{H}_2$ per effetto di questa sostituzione, il sistema (1') conserva la forma semicanonica rispetto ad H_1 e H_2. Abbiamo cioè:

$$(1'')\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\varrho_1}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial P_1},\ \frac{d\vartheta_1}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1},\ \frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1},\\&\frac{dP_1}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1},\ \frac{d\Theta_1}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1},\ \frac{d\Phi_1}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1},\\&\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H_2}{\partial p_2}\ \text{ecc.},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\ \text{ecc.}\end{aligned}\right.$$

2. Poichè le (1'') ammettono l'integrale dellle forze vive $H = \text{cost.}$, e poichè la forza viva è una quadrica definita nelle componenti delle quantità di moto assolute dei tre punti, e quindi (ammesso fisso il centro di gravità del sistema) in quelle dei punti P_1, P_2, tenendo conto della (2) e dei cambiamenti di variabili eseguiti si arriva alle seguenti conclusioni:

I. se ϱ_1 tende a zero (col convergere di t verso un valore t_1) le sei funzioni di t:

$$\sqrt{\varrho_1}\,P_1\,,\quad \frac{\Theta_1}{\sqrt{\varrho_1}}\,,\quad \frac{\Phi_1}{\sqrt{\varrho_1}\,\text{sen}\,\vartheta_1}\,;\quad \sqrt{\varrho_1}\,p_2\,,\quad \sqrt{\varrho_1}\,q_2\,,\quad \sqrt{\varrho_1}\,r_2\,,$$

definite come integrali delle (1''), rimangono finite; le ultime tre anzi, come si potrebbe ricavare tenendo conto del secondo gruppo di equazioni (1''), tendono a zero.

II. In un intorno abbastanza piccolo di t_1, $\dfrac{d\varrho_1}{dt}$ si mantiene diversa da zero insieme al prodotto $\sqrt{\varrho_1}\,P_1$.

3. Il moto dei tre punti P_0, P_1, P_2 si mantiene regolare, e le equazioni (1'') sono integrabili mediante serie convergenti, finchè le condizioni iniziali del moto non sieno tali, che dopo un tempo finito avvenga un urto [1].

Ora noi ammetteremo, che, sotto certe condizioni iniziali, una delle tre distanze, p. es. ϱ_1, si riduca a zero per $t = t_1$.

Siccome in un intorno sufficientemente piccolo di t_1 (questo valore escluso) abbiamo visto, che $\dfrac{d\varrho_1}{dt}$ è diversa da zero, e siccome, quando si escluda t_1, le funzioni $\varrho_1, \vartheta_1, \varphi_1, P_1, \Theta_1, \Phi_1, x_2, \ldots, p_2, \ldots$ dipendono in modo regolare da t, così si conclude che $t, \vartheta_1, \varphi_1$ ecc. si potranno riguardare, per valori di ϱ_1 abbastanza piccoli ma diversi da zero, cioè sopra una traiettoria d'urto in vicinanza di P_0, funzioni regolari di questa variabile soddisfacenti

[1] Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, p. 583.

al sistema differenziale [1]:

$$\frac{dt}{d\varrho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}}, \qquad H = C ;$$

$$(1''') \begin{cases} \mathrm{I} \begin{cases} \dfrac{d\vartheta_1}{d\varrho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\varphi_1}{d\varrho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, \\ \dfrac{d\Theta_1}{d\varrho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\Phi_1}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, \end{cases} \\ \mathrm{II} \quad \dfrac{dx_2}{d\varrho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1} \text{ ecc.} \quad \dfrac{dp_2}{d\varrho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1} \text{ ecc.} \end{cases}$$

Per discutere l'esistenza in un intorno di $\varrho_1 = 0$, di integrali regolari di questo sistema conviene operare in esso la trasformazione di variabili:

$$r = \sqrt{\varrho_1}\,, \quad R = -rP_1\,, \quad \vartheta'_1 = \frac{\Theta_1}{\varrho_1^2}\,, \quad \varphi'_1 = \frac{\Phi_1}{\varrho_1^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta_1} \text{ [2]}.$$

Possiamo allora, con un calcolo facile a verificare, arrivare al sistema:

$$(S) \begin{cases} \mathrm{I} \begin{cases} \dfrac{d\vartheta_1}{dr} = -2r^2 \dfrac{\vartheta'_1}{R}, & \dfrac{d\varphi_1}{dr} = -2r^2 \dfrac{\varphi'_1}{R}, \\ r\dfrac{d\vartheta'_1}{dr} = -4\vartheta'_1 + r^3 \dfrac{2F_{\vartheta_1}}{R}, & r\dfrac{d\varphi'_1}{dr} = -4\varphi'_1 + r^3 \dfrac{2F_{\varphi_1}}{R}, \end{cases} \\ \mathrm{II} \quad \dfrac{dx_2}{dr} = -2r\dfrac{F_{p_2}}{R} \text{ ecc.}, \quad \dfrac{dp_2}{dr} = -2r^2 \dfrac{F_{x_2}}{R}, \end{cases}$$

dove con $F_{\vartheta_1}, F_{\varphi_1}, F_{x_2}, \dots F_{p_2}, \dots$ si sone indicate delle funzioni di $r, \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta'_1, \varphi'_1, x_2, \dots, p_2, \dots$ regolari per r abbastanza piccolo e per valori finiti degli altri argomenti.

A questa conclusione però si arriva dopo aver provato, giovandosi dei risultati ottenuti nel lemma I° del n. 2, che, per ogni soluzione reale del

(1) L'equazione $\frac{dP_1}{d\varrho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$ si può sostituire, come è lecito, con l'equazione in termini finiti $H = \text{cost.}$, atta a fornire, come risulta dalla (2), la funzione P_1 in termini delle altre. Integrate le dieci equazioni I e II risulta noto anche P_1 e l'equazione $\frac{dt}{d\varrho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}} = \frac{1}{P_1}$ ci dà modo di determinare la legge del moto.

(2) È appena necessario avvertire, per quanto riguarda il significato cinematico di ϑ'_1 e φ'_1, ch'esse rappresentano, come risulta dalle (3), le velocità angolari del raggio vettore relativo al punto P_1 nel piano $\varphi_1 = \text{cost}$ e $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$.

sistema (S), ϑ_1' e φ_1' devono ridursi a zero per $r=0$ e quindi, in virtù delle prime due equazioni del primo gruppo, che per $r=0$ tanto ϑ_1 quanto φ_1 devono convergere verso valori determinati e finiti.

Ricordando allora (v. n. 2, lemma II°), che $R = -\sqrt{\varrho_1}\, P_1$ si mantiene diverso da zero per r convergente a zero, si conclude che i secondi membri delle (S) sono regolari, e che perciò la singolarità del sistema dipende dal fatto, che le due seconde equazioni del primo gruppo contengono nel primo membro r a fattore.

Si rileva poi, dalla forma delle equazioni stesse, che è possibile determinare le successive derivate delle funzioni incognite in un intorno di $r=0$ e quindi costruire le serie, che definiscono queste funzioni. Nulla avverte però che le serie debbano risultare convergenti. È applicando il metodo del calcolo dei limiti di Cauchy, che si dimostra anche questo fatto.

In definitiva si conclude, che « il sistema (S) ammette ∞^8 integrali « olomorfi, che per $r=0$ diventano: $\vartheta_1' = \varphi_1' = 0$ mentre le altre funzioni « $\vartheta_1, \varphi_1, x_2, \ldots, y_2, \ldots$ assumono valori costanti arbitrali $\vartheta_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots$ $y_2^{(0)}, \ldots$ ».

Poichè inoltre si prova:

1° che « non esistono soluzioni reali, all'infuori di quelle olomorfe, tali « che per $r=0$ ϑ_1' e φ_1' contemporaneamente si annullino, mentre le altre « funzioni assumono valori costanti arbitrari »,

2° che « gli integrali olomorfi corrispondono effettivamente alle traiet- « torie d'un urto », cioè che « sopra una di esse r (e quindi ϱ_1) si annulla « in un intervallo di tempo finito comprendente l'istante iniziale »,

così concludiamo che:

Tutte e soltanto le soluzioni del sistema (S), *olomorfe per* $r=0$, *corrispondono alle traiettore, lungo le quali avviene l'urto dei due corpi* P_0, P_1.

4°. In virtù dei valori che devono assumere gli integrali per $r=0$, è chiaro, che la forma delle soluzioni olomorfe corrispondenti alle traiettorie singolari, di cui abbiamo fatto parola, sarà:

$$\vartheta_1' = r\beta_1^{(1)}(r, \vartheta_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots\ldots y_2^{(0)} \ldots)\,, \quad \varphi_1' = r\gamma_1^{(1)}(r, \vartheta_1^{(0)}, \ldots\ldots);$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^{(0)} + r\beta_1(r, \vartheta_1^{(0)}, \ldots\ldots)\,, \quad \varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + r\gamma_1(r, \vartheta_1^{(0)}, \ldots\ldots);$$

$$x_2 = x_2^{(0)} + r\alpha_2(r, \vartheta_1^{(0)}, \ldots\ldots) \text{ ecc. }; \quad p_2 = p_2^{(0)} + r\alpha_2^{(1)}(r, \vartheta_1^{(0)} \ldots\ldots) \text{ ecc.},$$

$\beta_1, \gamma_1, \beta_1^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, \alpha_2, \ldots, \alpha_2^{(1)}, \ldots$ indicando delle funzioni regolari per r abbastanza piccolo, qualunque sieno i valori finiti degli altri argomenti.

Poichè variando questi ultimi in tutti i modi possibili si possono ottenere tutte le traiettorie d'urto, così è ben ovvio, che si avranno le condizioni, cui devono soddisfare r, ϑ_1, φ_1 ecc., affinchè appartengano ad una traiettoria singolare, eliminando le 8 costanti d'integrazione fra le 10 equazioni scritte.

Risolvendo le ultime otto rispetto a $\vartheta_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}$ ecc. (il che è permesso dal fatto che il relativo determinante funzionale è diverso da zero in un intorno di $r=0$) e sostituendo questi valori, necessariamente regolari in un intorno di $r=0$ rispetto a r, ϑ_1, φ_1 ecc. nelle prime due, abbiamo due relazioni del tipo:

$$\vartheta'_1 - r\,F_1(r\,, \vartheta_1\,, \varphi_1\,, x_2\,, ..\,, p_2\,, ..) = 0\,,$$
$$\varphi_1 - r\,F_2(r\,, \vartheta_1\,, \varphi_1\,, x_2\,, ..\,, p_2\,, ..) = 0\,.$$

Si potrebbe proporci di sviluppare F_1 ed F_2 in serie di potenze rispetto ad r nell'intorno del punto $r=0$, e sarebbe anche facile ricavare due equazioni alle derivate parziali atte a fornirci con successive derivazioni i coefficienti di queste serie, ma noi ci limiteremo qui ad avere accennato a questa possibilità e finiremo coll'osservare come le due equazioni di condizioni trovate dieno la materiale conferma di quanto aveva preveduto il sig. Painlevé (¹).

Fisica. — *Intorno ad un completo igrometro ad assorbimento.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

I modi più diretti per determinare il grado d'umidità dell'aria sono certamente quelli che sono usati coll'igrometro chimico e con quelli di Schwackhöfer e di Edelmann, e che consistono nel far assorbire il vapore acqueo dell'aria dall'acido solforico concentrato e nel determinare o l'aumento di peso di questo come avviene coll'igrometro chimico, o la diminuzione di volume o di pressione dell'aria cogli altri due igrometri; nel primo caso si ha il peso del vapore contenuto in un noto volume d'aria, nel secondo caso si ha la tensione o il volume di questo vapore.

In entrambi questi metodi si richiede una serie di operazioni di non breve durata, che può spesso esser causa di errore non lieve, e forse perciò l'uso di essi è assai poco frequente.

L'igrometro chimico non pare suscettibile di grandi modificazioni o semplificazioni, nè so che ne sia stata mai proposta qualcuna. Invece gli igro-

(¹) Loc. cit. p. 286.