ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

o non sono bene distinte. Nella morte per emorragia quando si aprono le carotidi, l'azione eccitante dell'anemia va crescendo e rinforza i moti respiratorî, così che le ultime respirazioni sebbene distanti l'una dall'altra sono le più forti; poi si arresta il respiro, comparisce tanto nel torace quanto nel diaframma la reazione caratteristica della tonicità e poi tutto ritorna nel riposo e il cuore si arresta senza che il midollo spinale abbia dato impulso alle respirazioni finali.

Come succede nella morte per gli anestetici, dove talora cessa di funzionare prima il respiro ed altre volte cessa contemporaneamente, o prima, il cuore, così abbiamo in tutti i generi di morte delle differenze individuali nel modo di comportarsi della respirazione che dipendono dallo stato del midollo spinale e del cuore. Quando manca la pausa, i movimenti del respiro nell'asfissia diventano più forti, poco per volta si rallentano, e si indeboliscono fino a che cessano completamente.

Matematica. — *Sull'inversione degl'integrali definiti.* Nota II del dott. Pietro Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti [1].

5. Seguitando la trattazione del problema enunciato nella Nota precedente *Sull'inversione degli integrali definiti*, io prendo a considerare un caso più generale.

Abbiasi da determinare una $f(x)$, finita e continua in $|o, \alpha|$, in guisa che sia soddisfatta l'equazione

$$\varphi(y) = \int_0^y \{ f'(x) + \psi(x, y) f(x) \} dx ; \tag{7}$$

in cui $\varphi(y), \varphi'(y), \psi(x, y), \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_2(x, y)$ sono finite e continue nell'intervallo considerato, e

$$H(x) = e^{\int_0^x \psi(\xi, x) d\xi}$$

finita e diversa da zero nello stesso intervallo. Qui dobbiamo supporre $\varphi(0) = 0$, altrimenti la soluzione richiesta non esiste.

Ciò posto, la funzione ausiliaria $F(x, y)$ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \psi(x, y) F(x, y) = \varphi'(x) ;$$

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

avremo quindi

$$F(x, y) = \frac{1}{K(x, y)} \left\{ \int \varphi'(x)\, K(x, y)\, dx + Y(y) \right\},$$

ove

$$K(x, y) = e^{\int \psi(x, y)\, dx} \quad \text{e} \quad Y = \text{funz. arb.}$$

Seguendo sempre il metodo tenuto nei paragrafi precedenti, noi assumeremo, per così dire, come primo valore approssimato di $f(x)$, la funzione $Z_0(x)$ che si ottiene dalla $F(x, y)$ facendo $y = x$, e che prende il valore a per $x = 0$. Tale funzione è definita dalla formula

$$Z_0(x) = \frac{1}{H(x)} \left\{ \int_0^x \varphi'(x)\, H(x)\, dx + a \right\};$$

onde ponendo

$$f(x) = Z_0(x) + f_1(x),$$

avremo

$$\varphi(y) - \int_0^y (Z_0'(x) + \psi(x, y)\, Z_0(x))\, dx =$$

$$= \varphi_1(y) = \int_0^y \left\{ f_1'(x) + \psi(x, y)\, f_1(x) \right\} dx.$$

Questa equazione è della forma (7); per conseguenza, ripetendo tutti i ragionamenti già fatti, porremo

$$f_1(x) = Z_1(x) + f_2(x)$$

con

$$Z_1(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x \varphi_1'(x)\, H(x)\, dx;$$

espressione questa che si annulla per $x = 0$. Per calcolare $\varphi_1'(x)$, formiamoci anzitutto l'equazione differenziale del primo ordine a cui soddisfa $Z_0(x)$. Si ottiene subito

$$Z_0'(x) = \varphi'(x) - \frac{H'(x)}{H^2(x)} \left\{ \int_0^x \varphi'(x)\, H(x)\, dx + a \right\},$$

e quindi

$$Z_0'(x) + \frac{H'(x)}{H(x)} Z_0(x) = \varphi'(x),$$

ossia

$$(e) \qquad Z_0'(x) + \left\{ \int_0^x \psi_2(\xi, x)\, d\xi + \psi(x, x) \right\} Z_0(x) = \varphi'(x).$$

Ciò fatto, dall'espressione di $\varphi_1(y)$ si trae

$$\varphi_1'(x) = \varphi'(x) - (Z_0'(x) + \psi(x, x)\, Z_0(x)) - \int_0^x \psi_2(\xi, x)\, Z_0(\xi)\, d\xi ;$$

quindi, in virtù della (e),

$$\varphi_1'(x) = \int_0^x [Z_0(x) - Z_0(\xi)]\, \psi_2(\xi, x)\, d\xi .$$

Risulta dunque

$$Z_1(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x H(\eta)\, d\eta \int_0^\eta [Z_0(\eta) - Z_0(\xi)]\, \psi_2(\xi, \eta)\, d\xi .$$

Ripetendo ora il ragionamento quante volte si voglia, si trova

$$f(x) = Z_0(x) + Z_1(x) + \cdots + Z_n(x) + f_{n+1}(x),$$

ove Z_0 ha l'espressione trovata,

$$Z_n(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x H(\eta)\, d\eta \int_0^\eta [Z_{n-1}(\eta) - Z_{n-1}(\xi)]\, \psi_2(\xi, \eta)\, d\xi , \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

e la $f_{n+1}(x)$ soddisfa un'equazione come la (7). Orbene, la serie

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n + \cdots$$

è convergente in ugual grado nell'intervallo $|0, \alpha|$, e rappresenta la $f(x)$ che soddisfa alla (7) e che assume il valore a per $x = 0$. Infatti, essendo $Z_0(x)$ finita e continua in $|0, \alpha|$, indicheremo con L il limite superiore dei suoi valori assoluti; con M e m rispettivamente il limite superiore e l'inferiore dei valori di $|H(x)|$, e con L_1 il limite superiore di quelli di $|\psi_2(x, y)|$ per x e y variabili nell'intervallo considerato. Allora risulta

$$|Z_1(x)| < 2\, L L_1 \frac{M}{m} \frac{|x|^2}{2}$$

$$|Z_2(x)| < 2\, L \cdot \left(\frac{L_1 M}{m}\right)^2 \frac{|x|^4}{2 \cdot 4} + 2L \cdot \left(\frac{L_1 M}{m}\right)^2 \frac{|x|^4}{\underline{|4}} < L \cdot \left(\frac{L_1 M}{m}\right)^2 \frac{|x^2|^2}{1 \cdot 2} ,$$

e così via; quindi in generale

$$|Z_n(x)| < L \left(\frac{L_1 M}{m}\right)^n \frac{|x^2|^n}{\underline{|n}} ,$$

il che dimostra la convergenza in ugual grado della serie.

È poi chiaro che per $x=0$ assume il valore a, perchè tutte le Z_s si annullano per tal valore di x, ad eccezione di Z_0 che diventa uguale ad a. Dunque la serie trovata rappresenta una funzione finita e continua in $|0, \alpha|$, che assume per $x=0$ un valore dato ad arbitrio. Essa soddisfa l'equazione (7), come risulta chiaramente dal procedimento usato per calcolarla. Ciò, del resto, può verificarsi in modo diretto. Derivando l'equazione proposta rispetto ad y, si ottiene

$$\varphi'(y) - [f'(y) + \psi(y, y) f(y)] = \int_0^y \psi_2(x, y) f(x)\, dx ;$$

e quindi, per l'espressione di $f(y)$,

$$\varphi'(y) - \sum_0^\infty (Z'_n(y) + \psi(y, y) Z_n(y)) = \sum_0^\infty \int_0^y \psi_2(x, y) Z_n(x)\, dx .$$

Se ora osserviamo che Z_0 soddisfa alla (e), e che in generale per $n=1,2,3...$ sussiste l'equazione

$$Z'_n(x) + \left\{ \int_0^x \psi_2(\xi, x)\, d\xi + \psi(x, x) \right\} Z_n(x) = \varphi'_n(x),$$

la precedente diventa:

$$Z_0(y) \int_0^y \psi_2(\xi, y)\, d\xi -$$

$$- \sum_1^\infty \left[\varphi'_n(y) - Z_n(y) \int_0^y \psi_2(\xi, y)\, d\xi \right] = \sum_0^\infty \int_0^y \psi_2(\xi, y) Z_n(\xi)\, d\xi ,$$

ossia

$$- \sum_1^\infty \varphi'_n(y) = \sum_0^\infty \int_0^y (Z_n(\xi) - Z_n(y))\, \psi_2(\xi, y)\, d\xi .$$

Ma questa è un'identità, perchè $\varphi'_n(y)$ è precisamente uguale a

$$\int_0^y [Z_{n-1}(y) - Z_{n-1}(\xi)]\, \psi_2(\xi, y)\, d\xi ;$$

dunque resta dimostrato l'asserto.

La soluzione trovata è unica. Supponiamo, infatti, che esista un'altra soluzione $f_1(x)$ della (7), finita e continua in $|0, \alpha|$ ed uguale ad a per $x=0$. Lu funzione $f(x) - f_1(x) = P(x)$, che si annulla per $x=0$, dovrebbe soddisfare all'equazione

$$0 = P(y) + \int_0^y \psi(x, y)\, P(x)\, dx ;$$

dalla quale si trae

$$(o) \qquad |P(y)| = \int_0^{|y|} |\psi(x, y)| \cdot |P(x)| \, dx .$$

Indicando con L e M rispettivamente i limiti superiori dei valori assoluti di $P(x)$ e $\psi(x, y)$ per x e y variabili in $|0, \alpha|$, si deduce

$$|P(y)| \leq LM|y|$$
$$|P(y)| \leq (LM)^2 \frac{|y|^2}{\underline{|2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|P(y)| \leq (LM)^n \frac{|y|^n}{\underline{|n}},$$

usando successivamente la (o). Si vede dunque che $|P(y)|$ è più piccola di qualunque quantità assegnata piccola a piacere. Se ne conclude che $f(x) - f_1(x)$ è nulla identicamente.

L'equazione (7), che abbiamo risoluta, contiene in sè, come caso particolare, la seguente:

$$(8) \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_0^y \psi(x, y) f(x) \, dx ,$$

che fu considerata dal prof. Volterra [1]. Infatti, mantenendo le ipotesi fatte sulla $\psi(x, y)$, dovrà essere $f(0) = \varphi(0)$; talchè la precedente si potrà scrivere:

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \int_0^y \{ f'(x) + \psi(x, y) f(x) \} \, dx .$$

Questa equazione è della forma (7) e il primo membro si annulla per $y = 0$; quindi possiamo concludere, che esiste una sola soluzione $f(x)$ della (8), finita e continua in $|0, \alpha|$. Essa si calcola col nostro procedimento, assegnando ad a il valore $\varphi(0)$.

Notiamo ancora che nella funzione ausiliaria $F(x, y)$ comparisce una arbitraria $Y(y)$, della quale si può disporre opportunamente entro certi limiti, onde ottenere per le Z_s delle espressioni più semplici o più utili nelle applicazioni.

Osserviamo infine che l'equazione più generale

$$\varphi(y) = \int_0^y [\psi_0(x, y) f'(x) + \psi_1(x, y) f(x)] \, dx$$

[1] Rendiconti della R. Acc. Lincei, 1896; Annali di Matematica 1897.

si può ridurre alla forma (7) o (8). Infatti, con una integrazione per parti si ottiene

$$\varphi(y) = \varphi_0(y, y) f(y) - \psi_0(x, 0) f(0) + \int_0^y \left(\psi_1 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right) f(x)\, dx ;$$

la quale mostra che deve essere $f(0) = 0$, se $\psi_0(x, 0)$ è una vera funzione di x. In tal caso l'equazione assume la forma (8), cioè

$$\frac{\varphi(y)}{\psi_0(y, y)} = f(y) + \int_0^y \frac{\psi_1 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x}}{\psi_0(y, y)} f(x)\, dx ,$$

supponendo che sia $\varphi(0) = 0$, $\psi_0(y, y) \neq 0$, e che il coefficiente di $f(x)$ soddisfaccia alle condizioni imposte alla ψ nella (8).

Se $\psi_0(x, 0)$ fosse una costante non nulla, si potrebbe porre

$$\psi_0(y, y)\ f(y) = \mathrm{P}(y) ;$$

dopo di che l'equazione assumerebbe la forma (7). Ed infine, supponendo $\psi_0(x, 0) = 0$, si ritornerebbe alla forma (8).

Fotografia del cielo. — *Sulla precisione delle posizioni delle stelle ottenute mediante la fotografia.* Nota del prof. G. Boccardi [1], presentata dal Corrispondente A. Riccò.

A tutti è noto che l'applicazione della fotografia celeste alla costruzione di cataloghi stellari ha notevolmente abbreviato il lavoro; ma forse non tutti si fanno ragione del grado di esattezza che si può raggiungere nelle posizioni fotografiche delle stelle, grado che è di gran lunga superiore a quello delle posizioni date dai migliori Cataloghi e poggiate sopra molte osservazioni meridiane.

L'illustre sig. Loewy, in diverse Memorie pubblicate recentemente, ha esaminate e discusse le diverse cause di errore, le quali, sebbene in grado minimo, sussistono nelle posizioni fotografiche delle stelle. La conclusione cui egli è giunto, sia in dette Memorie, sia nella introduzione al I volume del catalogo fotografico di Parigi, è che nell'errore il quale rimane sulle posizioni fotografiche delle stelle entrano:

1°. La inesattezza delle misure delle coordinate rettilinee delle stelle sulla lastra;

2°. La inesattezza proveniente dalla costituzione del sottile strato di gelatina che ricopre la lastra, cioè dal suo non uniforme grado di sensibilità

[1] R. Osservatorio di Catania. Dicembre 1903.