ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCC.

1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

Matematica. — *Ricerche gruppali sulle equazioni della dinamica.* Nota II [1] di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

3. Riprendo in questa seconda Nota le notazioni usate nella prima e voglio applicare i metodi esposti alla ricerca dei problemi a tre coordinate libere che ammettono un gruppo G: caso specialmente interessante, perchè comprende il modo del punto libero, del solido con un punto fisso. Per non allungare le presenti pagine, escluderò il caso di Stäckel che G sia a uno o a due parametri, e il caso banale di immediata trattazione diretta del punto pesante e mi restringerò al punto che per le (7) e per i risultati dei miei lavori citati è il punto fondamentale: la ricerca dei gruppi G possibili: conosciuto G, è immediata la ricerca dei corrispondenti problemi.

I. Cominciamo ora dal caso che Γ si riduca all' identità; poichè noi non trattiamo i casi semplicissimi che G sia a uno o a due parametri e poichè G in tal caso non può avere più di tre parametri, avrà G proprio tre parametri, e sarà generato dalle

$$X_i = x_1^{i-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + Y_i \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{9}$$

dove

$$Y_i = \xi_2^{(i)}(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3^{(i)}(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Le Y_i generano evidentemente un gruppo, che dico a tre parametri. Se infatti $\sum_i \alpha_i Y_i = 0$ ($\alpha_i =$ cost) sarebbe $Z = \sum \alpha_i x_1^{i-1}\frac{\partial}{\partial x_1}$ in G; con una trasformazione proiettiva in x_1 si potrà fare $\alpha_3 = 0$ e perciò anche $(X_1 Z)$, $(X_2 Z)$, $(X_3 Z)$ ossia $\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$, $(2\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ sarebbero come la $Z = (\alpha_1 + \alpha_2 x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}$ in G; e poichè G non può avere due trasformazioni con le stesse traiettorie sarebbe $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Le Y_i generano perciò proprio un gruppo a tre parametri su una o due variabili della composizione $(Y_1 Y_2) = Y_1$; $(Y_1 Y_3) = 2Y_2$; $(Y_2 Y_3) = Y_3$. Nel primo caso questo gruppo sarebbe perciò simile al gruppo $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, $x_2^2\frac{\partial}{\partial x_2}$; e dalle (9) si avrebbero le X_i; le (7), come tosto si riconosce, diventano però incompatibili. Il gruppo delle Y_i è perciò transitivo nelle variabili x_2, x_3; quindi

[1] V. Questi Rendiconti, fasc. 12°, 2° sem. 1903, pag. 502.

uno dei sottogruppi $(Y_1 Y_2)$ $(Y_2 Y_3)$ è transitivo; con una trasformazione di Darboux (proiettiva per x_1) potremo supporre $(Y_1 Y_2)$ transitivo. E poichè $(Y_1 Y_2) = Y_1$ potremo supporre $Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}$; $Y_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$. E per le formole di composizione si trova:

$$Y_3 = (x_2^2 + h\, e^{2x_3}) \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_2 + k\, e^{x_3}) \frac{\partial}{\partial x_3} \; (h = \text{cost} \; ; \; k = \text{cost}) .$$

Le (9) ci danno quindi le X_i e le formole (7) diventano:

$$X_1(ds^2) = \varepsilon_1\, ds^2 \; ; \; X_2(ds^2) = \varepsilon_2\, ds^2 \; ; \; X_3(ds^2) = -(x_1 + \varepsilon_3)\, ds^2$$
$$(\varepsilon_i = \text{cost}).$$

Le formule di composizione danno quindi (cfr. la mia Nota citata paragrafo 5)

$$\varepsilon_1 = 0 \; ; \; 2\varepsilon_2 = -1 \; ; \; \varepsilon_3 = 0 .$$

E le equazioni precedenti diventano un sistema completo, che permette di determinare senz'altro « ds^2 ».

Sia invece Γ a un parametro e ne sia $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ la trasformazione generatrice; sarà

$$ds^2 = e^{kx_2} (c_{11}\, dx_1^2 + c_{22}\, dx_2^2 + 2c_{23}\, dx_2\, dx_3 + c_{33}\, dx_3^2)$$
$$\left(k = \text{cost} \; ; \; \frac{\partial c_{rs}}{\partial x_2} = 0\right)$$

il suo elemento lineare. Per trovare i casi in cui G abbia almeno tre parametri, dovremo vedere anzitutto quando oltre a X_1 esistono in G due trasformazioni infinitesime

$$X_i = x_1^{i-2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2^{(i)}(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3^{(i)}(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \; (i = 2, 3) .$$

Intanto la X_2 generando un gruppo con X_1 potremo chiaramente, mutando il parametro x_3 supporre

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + (a\, x_2 + b\, x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + c \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dove a, b, c sono costanti; anzi per i teoremi sulla somiglianza dei gruppi potremo supporre che se $c = 0$ sia anche $a\, b = 0$ e se $c \neq 0$ sia $b = 0$; in una parola potremo supporre $c\, b = a\, b = 0$.

Cerchiamo di costruire una trasformazione

$$X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

che con le precedenti generi in gruppo. Troveremo facilmente ricordando le formule che legano le trasformazioni infinitesime di un gruppo e i teoremi sulla similitudine di due gruppi, che tutti i casi possibili si riducono ai seguenti:

$$\text{(II)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} ; X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} ; X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (a x_2 + b x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + c \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$(b a = b c = 0)$$

$$\text{(III)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} ; X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} ; X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (a x_2 + b x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{(IV)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} ; X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} ; X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (a x_2 + \eta) \frac{\partial}{\partial x_2} + [(a-1) x_3 + b] \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dove a, b, c sono costanti, η è funzione di x_3.

Per cercare ora se possono esistere gruppi G a 4 parametri, basta cercare quando uno dei gruppi precedenti può essere contenuto in un gruppo più ampio in cui esista un'altra trasformazione generatrice del tipo:

$$X_4 = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

in modo però che il gruppo non abbia due trasformazioni con le stesse traiettorie. Si trova possibile il solo caso:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} ; X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} ; X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} ;$$

$$X_4 = x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + b x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

I primi tre casi (II), (III), (IV) corrispondendo, almeno per valori generici delle costanti, a gruppi semplicemente transitivi ci danno effettivamente in generale problemi dinamici della natura voluta; per l'ultimo caso invece le (7) sono incompatibili, come facilmente si riconosce.

Sia ora Γ un gruppo a due parametri e quindi, per un teorema precedente, operi transitivamente sopra ciascuna varietà $x_1 = \text{cost}$.

Caso I°. Γ è a trasformazioni permutabili; allora le sue trasformazioni infinitesime si potranno immaginare essere le:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Una trasformazione

$$x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (i = 0 \text{ oppure } i = 1)$$

che con le precedenti generi un gruppo è certamente del tipo

$$X_3 = x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + (a x_2 + b x_3 + e) \frac{\partial}{\partial x_2} + (c x_2 + d x_3 + f) \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$(a, b, c, \ldots = \text{cost}).$$

Scrivendo $X_3 + e X_1 + f X_2$ al posto di X_3 e trasformando linearmente x_2, x_3 si riconosce che si può porre:

$$\text{(V)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \, X_3 = x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + a x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (c x_2 + d x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$(i = 0 \text{ oppure } i = 1)$$

dove se $a \neq d$ si può fare $c = 0$ ossia si può supporre

$$c(a - d) = 0.$$

Il gruppo (V) essendo semplicemente transitivo, si potranno pure integrare le corrispondenti equazioni di Killing generalizzate. Se noi vogliamo trovare i gruppi G a più di tre parametri, dovremo anzitutto studiare i gruppi del tipo:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}; \, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}; \, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + a x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (c x_2 + d x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (l x_2 + m x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + (p x_2 + q x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dove a, c, d, l, m, p, q sono costanti e $c(a - d) = 0$. Scrivendo le condizioni affinchè le X_1, X_2, X_3, X_4 formino effettivamente un gruppo, e ricordando i teoremi di Lie sulla somiglianza di due gruppi, troviamo i seguenti soli tipi possibili:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\,;\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}\,;$$

$$X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (l\,x_2 + m\,x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + (p\,x_2 + q\,x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

oppure

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\,;\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;$$

$$X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (q-1)\,x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (p\,x_2 + q x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

Ricordiamo che per ridurre il gruppo a questa forma abbiamo tutt'al più fatto uso di una sostituzione lineare reale immaginaria tra le x_2, x_3; se noi tanto nell'un caso quanto nell'altro integriamo le equazioni di Killing otteniamo per lo « ds^2 » o una forma degenere (a discriminante nullo) o una forma che non si può mutare in una forma positiva con una trasformazione (anche immaginaria) lineare sulle x_2, x_3. Questi due casi sono perciò impossibili.

Caso II. Γ si riduca a un gruppo a due parametri di trasformazioni non permutabili. Potremo per noti teoremi immaginare Γ generato dalle: $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$; $X_1 = e^{-x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}$; sarà perciò $(X_1 X_2) = X_1$ e perciò (cfr. Nota citata paragrafo 5) sarà X_1 un puro movimento per ds^2; come si verifica subito se un gruppo a tre parametri oltre alle precedenti contiene una trasformazione

$$x_1{}^i \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_2(x_2\,,\,x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3(x_2\,,\,x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} \quad (i=0 \text{ oppure } i=1)$$

lo potremo immaginare generato dalle:

$$\text{(VI)}\qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\,;\ X_1 = e^{-x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\,;\ X_3 = x_1{}^i \frac{\partial}{\partial x_1} + $$

$$+ (a x_3 + b)\frac{\partial}{\partial x_3} \quad (a = \text{cost}\ ;\ b = \text{cost}).$$

Un tale gruppo essendo semplicemente transitivo, sono compatibili le equazioni di Killing. Per vedere gli ulteriori casi eventualmente possibili bisogna trovare quei G_4 che contengono oltre a una trasformazione

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + (a\,x_3 + b)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

anche un'altra trasformazione

$$X_4 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (c x_3 + d) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

dove c, d sono nuove costanti; il gruppo G_4 dovendo contenere anche la $(X_3 X_4)$ sarà $a = 0$. Il sottogruppo $X_1 X_3 X_4$ è intransitivo; quindi (Nota citata paragrafo 1) è simile al gruppo di movimenti di una superficie a curvatura costante e siccome esso è integrabile avrà proprio un G_2 per gruppo derivato; perciò $c \neq 0$ e mutando x_3 in $x_3 +$ cost si può fare $d = 0$. Le equazioni di Killing si riconoscono facilmente incompatibili.

Sia ora Γ un gruppo a tre parametri: esso sarà il gruppo di movimenti di una superficie.

Caso I. Γ non sia integrabile; allora (Nota citata paragrafo 5) le sue trasformazioni generatrici X_1, X_2, X_3 saranno puri movimenti per le $x_1 =$ cost che perciò saranno a curvatura costante non nulla. Noi supporremo che questa curvatura sia positiva (se fosse negativa varrebbero considerazioni perfettamente analoghe). Allora (Bianchi: *Sugli spazi a tre dimensioni* ecc., Memorie dei XL), potremo scrivere:

$$ds^2 = c_{11}\, dx_1^2 + c_{22}\,(dx_2^2 + \text{sen}^2 x_2\, dx_3^2); \frac{\partial c_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial c_{11}}{\partial x_3} = \frac{\partial c_{22}}{\partial x_2} = \frac{\partial c_{22}}{\partial x_3} = 0$$

$$\text{(VII)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\ X_2 = \text{sen}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cot x_2 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\ X_3 = (X_1 X_2).$$

Una ulteriore trasformazione simile per il precedente elemento lineare del tipo

$$x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (i = 0 \text{ oppure } i = 1)$$

si vede subito che (a meno di una combinazione lineare delle precedenti) è del tipo $\frac{\partial}{\partial x_1}$ oppure $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$; otteniamo così i due gruppi

$$\text{(VIII)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\ X_2 = \text{sen}\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cot x_2 \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;$$

$$X_3 = (X_1 X_2)\,;\ X_4 = x^i \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (i = 0 \text{ oppure } i = 1)\,.$$

Si riconosce però facilmente coi metodi precedenti la impossibilità di un gruppo G_5.

Se le x_1 =cost fossero a curvatura negativa troveremmo i gruppi:

$$\text{(VII)}' \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(e^{-2x_2} - x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{(VIII)}' \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;$$

$$X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(e^{-2x_2} - x^{32})\frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, X_4 = x^i \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (i = 0 \text{ oppure } i = 1).$$

Caso II. Γ sia integrabile: esso sarà perciò un gruppo di movimenti di una superficie a curvatura nulla e potremo porre

$$\text{(IX)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\,;\, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Il suo gruppo derivato (X_1, X_2) sarà perciò al solito un gruppo di movimenti per le $x_1 =$ cost; ma poichè esso è transitivo tutto Γ sarà per le $x_1 =$ cost un gruppo di movimenti (cfr. Nota precedente) e perciò (Bianchi, loc. cit.) potremo porre:

$$ds^2 = c_{11}\, dx^2 + c_{22}(dx_2^2 + dx_3^2)$$

dove le c_{11}, c_{22} sono funzioni di x_1. Si riconosce tosto che una trasformazione che con le precedenti formi un gruppo, che sia simile per una forma di quest' ultimo tipo, e che sia del tipo

$$x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

si potrà ridurre a:

$$x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + k\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\,;\quad (k = \text{cost})$$

noi troviamo così il seguente gruppo

$$\text{(X)} \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\,;\, X_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;\, X_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\,;$$

$$X_4 = x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + k\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \quad (i = 0 \text{ oppure } i = 1)\ (k = \text{cost}).$$

Se esistesse tanto una trasformazione $\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots$, quanto una trasformazione $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots$, si riconosce facilmente integrando le (7) che il corrispondente problema dinamico sarebbe del tipo $(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, x_1)$ ossia si ridurrebbe al caso escluso del moto dei gravi.

Perciò, se un problema dinamico di cui le $x_1 =$ cost *sono le superficie equipotenziali e* x_1, x_2, x_3 *sono le coordinate libere ammette un gruppo* G *che trasforma in sè i fasci di traiettorie,* G *è di uno dei tipi* (I)....., (X) *o di uno dei tipi di Staeckel* (se è a uno o a due parametri) *oppure il problema si riduce al caso ovvio del moto dei gravi.*

I problemi corrispondenti si ottengono senz'altro integrando le equazioni, che abbiamo chiamato di Killing generalizzate; noi, al solo scopo di non allungar troppo le presenti pagine, non daremo le formule corrispondenti.

I medesimi metodi risolvono con sufficiente rapidità la nostra questione anche per i problemi dinamici a 4 coordinate libere, come il lettore può facilmente riconoscere.

Matematica. — *Sulle serie di funzioni analitiche.* Nota di Carlo Severini, presentata dal Socio S. Pincherle.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla riduzione elettrolitica delle soluzioni acide di anidride molibdica e su alcuni composti del triroclоruro di molibdeno* (¹). Nota II (²) di A. Chilesotti, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Sale di potassio $K_3 Mo Cl_6$.

Questo sale si preparò da prima concentrando la soluzione di tricloruro di molibdeno a bagno-maria finchè avesse raggiunto la concentrazione di circa 30 °/₀ di $Mo Cl_3$; a 35 cmc. di questa soluzione si aggiunsero 100 cm.³ di una soluzione al 9 °/₀ di KCl e si concentrò ancora a bagno-maria fino ad incipiente cristallizzazione. Lasciando evaporare a freddo sull'acido solforico questo liquido, non si depositavano che cristalli di cloruro potassico, mentre saturando la soluzione con acido cloridrico gassoso e secco si ottiene un abbondante precipitato costituito di piccole squamette rosa.

Dalla soluzione cloridrica di questi cristallini precipitò, per saturazione con acido cloridrico gassoso, una polvere cristallina pure rosa, che filtrata alla pompa e lavata con acido cloridrico concentrato ed alcool fu seccata su calce. L'analisi dimostrò che questo sale conteneva solo molibdeno, cloro e potassio ed in proporzioni tali che per un atomo di molibdeno erano presenti 6,28 atomi di cloro e 3.24 di potassio.

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di elettrochimica del R. Museo industriale italiano in Torino.

(²) V. pag. 22.