

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCC.
1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 2 agosto 1903.

Matematica. — *Sulle serie di funzioni analitiche.* Nota di CARLO SEVERINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

In questa Nota, riprendendo alcune ricerche, che di recente ho pubblicato sullo stesso argomento (1), dimostro anzitutto il seguente teorema:

Indichi Γ un'area finita, connessa, a contorno rettificabile, nel piano della variabile complessa x , e sia data una successione ordinata, infinita, di funzioni

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

ad un valore, analitiche, regolari in quell'area, il contorno incluso.

Se nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno (e quindi in tutto il contorno) è soddisfatta, per ogni numero intero, positivo m , la disuguaglianza

$$(1) \quad \left| \sum_0^m f_n(x) \right| < G,$$

(1) *Sulle serie di funzioni analitiche*, Foggia, Stab. Tipo-Litogr. De Nido Francesco Paolo, 1903. Cfr. anche Stieltjes, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. VIII, 1894, p. J, 56; Osgood, *Note on the functions defined by infinite series whose terms are analytic functions of a complex variable* ecc. *Annals of Mathematics*, Second Series, vol. III, n. 1, October 1901; Arzelà, *Sulle serie di funzioni analitiche*, *Rendic. della R. Acc. delle Scienze di Bologna*, novembre 1902; Vitali, *idem*, *Rendic. del R. Ist. Lomb. di sc. e lett.*, 1903.

ove G indica una costante, positiva, finita, e se posto:

$$x = \xi + i\eta$$

$$g_n(x) = P_n(\xi, \eta) + iQ_n(\xi, \eta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty),$$

una delle due serie

$$\sum_0^\infty P_n(\xi, \eta), \quad \sum_0^\infty Q_n(\xi, \eta)$$

è determinata nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno (finito) di una qualche area posta in Γ , mentre l'altra è tale in un punto qualsivoglia di quest'area; la serie

$$\Phi(x) = \sum_1^\infty g_n(x)$$

converge in egual grado in ogni area interna: quindi ivi rappresenta una funzione ad un valore, analitica, regolare, è derivabile termine a termine, e via dicendo.

Stabilito questo teorema mi valgo in seguito di esso per giungere ad altri notevoli risultati: dapprima al risultato che le medesime proprietà sopra dette possono per la serie $\Phi(x)$ dimostrarsi mediante ipotesi assai generali, fatte pei soli punti del contorno di Γ , e precisamente se, essendo, come nel teorema dianzi enunciato, soddisfatta la disuguaglianza (1), la serie medesima è lungo il contorno convergente (1); quindi al risultato che, ove si ammetta la convergenza della $\Phi(x)$ in ogni punto interno a Γ , a fine di concludere, che essa rappresenta in ogni area interna una funzione ed un valore, analitica, regolare, basta anche sapere, che, per infiniti valori di m , è, nei punti del detto insieme, soddisfatta la (1).

1. Facciamo per il momento soltanto l'ipotesi, che, nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno dell'area Γ , sia, per ogni m , soddisfatta la disuguaglianza (1).

Vediamo quali conseguenze se ne possono senz'altro ricavare.

Indichiamo con Γ' un'area interna a Γ , con t una variabile d'integrazione, e con γ il contorno di Γ , percorso nel senso positivo.

Per ogni x di Γ' sarà:

$$\sum_0^m g_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sum_0^m g_n(t)}{t-x} dt, \quad \frac{d}{dx} \sum_0^m g_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sum_0^m g_n(t)}{(t-x)^2} dt;$$

(1) Il risultato è analogo a quello stabilito da Runge nella Nota: *Zur Theorie der Analytischen Functionen*, Acta Mathematica, VI, 1885, cioè che la convergenza uniforme lungo il contorno produce la convergenza uniforme in ogni area interna; cfr. anche Bucca, *Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie*; Rendic. del Circ. mat. di Palermo, t. XII, 1898.

e quindi:

$$(2) \quad \left| \sum_0^m \varphi_n(x) \right| < \frac{G\bar{\gamma}}{2\pi d}, \quad \left| \frac{d}{dx} \sum_0^m \varphi_n(x) \right| < \frac{G\bar{\gamma}}{2\pi d^2},$$

ove d rappresenta la minima distanza, che può intercedere fra un punto del contorno di Γ' ed un punto del contorno di Γ , e $\bar{\gamma}$ la lunghezza di questo ultimo.

Se pertanto consideriamo le due successioni

$$(3) \quad P_0(\xi, \eta), \sum_0^1 P_n(\xi, \eta), \sum_0^2 P_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^m P_n(\xi, \eta), \dots$$

$$(4) \quad Q_0(\xi, \eta), \sum_0^1 Q_n(\xi, \eta), \sum_0^2 Q_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^m Q_n(\xi, \eta), \dots,$$

troviamo, per le (2), qualunque sia m ed in ogni punto (ξ, η) di Γ' :

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^m P_n(\xi, \eta) \right| &< \frac{G\bar{\gamma}}{2\pi d}, \quad \left| \sum_0^m Q_n(\xi, \eta) \right| < \frac{G\bar{\gamma}}{2\pi d}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_0^m P_n(\xi, \eta) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_0^m Q_n(\xi, \eta) \right| < \frac{G\bar{\gamma}}{2\pi d^2}, \\ \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_0^m P_n(\xi, \eta) \right| &= \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_0^m Q_n(\xi, \eta) \right| < \frac{G\bar{\gamma}}{2\pi d^2}. \end{aligned}$$

Le prime due disuguaglianze ci dicono, che le successioni (3) e (4) sono composte di funzioni comprese tutte fra due limiti fissi, finiti; le altre che le funzioni medesime sono *egualmente continue* in Γ' .

Ne segue, (1) che ognuna di quelle successioni deve ammettere una o più *funzioni limiti continue* nell'area Γ' , alle quali successioni da esse estratte tendono in egual grado; di più che, se, ad esempio, $P(\xi, \eta)$ è per la (3) una di tali funzioni limiti continue, e

$$\sum_0^{m_1} P_n(\xi, \eta), \sum_0^{m_2} P_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^{m_n} P_n(\xi, \eta), \dots$$

una successione, estratta dalla (3), che a $P(\xi, \eta)$ tende in egual grado, la corrispondente successione

$$\sum_0^{m_1} Q_n(\xi, \eta), \sum_0^{m_2} Q_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^{m_n} Q_n(\xi, \eta), \dots,$$

(1) Cfr. Arzelà, l. c., § 4.

estratta dalla (4), ammette in Γ' un'unica funzione limite continua, o più funzioni limiti continue, differenti fra loro per quantità costanti.

2. Quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, ove si ammetta inoltre che la serie $\sum_0^{\infty} P_n(\xi, \eta)$ sia determinata (quindi convergente) nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno (finito) di una qualche area Γ'' interna a Γ' , e l'altra serie, $\sum_0^{\infty} Q_n(\xi, \eta)$, determinata in un punto qualsiasi di quell'area, conduce facilmente a stabilire, che la

$$\Phi(x) = \sum_0^{\infty} g_n(x) = \sum_0^{\infty} P_n(\xi, \eta) + i \sum_0^{\infty} Q_n(\xi, \eta),$$

converge in egual grado nell'area Γ' .

Basterà provare che, sotto le ipotesi ora dette, ognuna delle successioni (3) e (4) ammette un'unica funzione limite continua in Γ' , perchè allora dalla eguale continuità delle successioni medesime segue senz'altro, che esse tendono uniformemente a tali funzioni limiti; e ciò è quanto occorre al nostro scopo.

Intanto la successione (3) deve ammettere un'unica funzione limite continua nell'area Γ'' : supponendo infatti che più funzioni limiti continue potessero ivi esistere per la (3), queste dovrebbero incidere nei punti del detto insieme, uniformemente denso sul contorno di Γ'' ed, a cagione della loro continuità, in tutti i punti di tale contorno; come funzioni armoniche, finite e continue insieme alle loro derivate parziali di tutti gli ordini, dovrebbero poi coincidere nei punti interni a Γ'' .

La successione (4) ammette anch'essa in quest'area una sola funzione limite continua, giacchè, per la convergenza della serie $\sum_0^{\infty} Q_n(\xi, \eta)$ in un punto, risultano nulle le costanti, di cui alla fine del paragrafo precedente.

Ciò posto è facile stabilire il medesimo risultato per la rimanente parte di Γ' .

Se è possibile la (3), ad esempio, ammetta quivi più funzioni limiti continue.

Siano $P(\xi, \eta)$ e $\bar{P}(\xi, \eta)$ due di queste, e ad esse tendano rispettivamente in egual grado le successioni

$$\sum_0^{m_1} P_n(\xi, \eta), \sum_0^{m_2} P_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^{m_n} P_n(\xi, \eta), \dots$$

$$\sum_0^{\bar{m}_1} \bar{P}_n(\xi, \eta), \sum_0^{\bar{m}_2} \bar{P}_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^{\bar{m}_k} \bar{P}_n(\xi, \eta), \dots$$

Considerando le successioni corrispondenti, estratte dalla (4)

$$\sum_0^{m_1} Q_n(\xi, \eta), \sum_0^{m_2} Q_n(\xi, \eta), \dots, \sum_0^{m_m} Q_n(\xi, \eta), \dots$$

$$\overline{\sum_0^{m_1} Q_n(\xi, \eta)}, \overline{\sum_0^{m_2} Q_n(\xi, \eta)}, \dots, \overline{\sum_0^{m_m} Q_n(\xi, \eta)}, \dots,$$

e chiamando $Q(\xi, \eta)$, $\overline{Q}(\xi, \eta)$ le funzioni limiti continue, a cui esse tendono in egual grado, veniamo ad avere, per tutto il campo Γ' , due funzioni ad un valore, analitiche, regolari

$$P(\xi, \eta) + iQ(\xi, \eta), \overline{P}(\xi, \eta) + i\overline{Q}(\xi, \eta).$$

Queste, coincidendo nei punti di Γ'' , devono coincidere anche in tutto il resto di Γ' , e però si ha:

$$P(\xi, \eta) = \overline{P}(\xi, \eta), Q(\xi, \eta) = \overline{Q}(\xi, \eta).$$

Il teorema enunciato in principio è dunque completamente dimostrato.

3. Si può giungere alle stesse conclusioni, come abbiamo sopra asserito, supponendo ancora che, nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno dell'area Γ , sia, per ogni m , soddisfatta la disuguaglianza (1), e che in ogni punto del contorno medesimo converga la serie

$$\Phi(x) = \sum_0^{\infty} g_n(x).$$

Evidentemente, per il teorema dianzi dimostrato, basterà far vedere che, sotto le ipotesi ora dette, la serie $\Phi(x)$ è, anche nei punti interni a Γ , convergente.

A tal uopo osserviamo che, essendo la $\Phi(x)$ convergente in tutti i punti del contorno di Γ , se, per ogni n fisso, esistono su tale contorno archi determinati, in ogni cui punto, per un qualche valore di p , si ha:

$$\left| \sum_n^{n+p} g_n(x) \right| \geq \sigma,$$

essendo σ un numero positivo, prefissato a piacere, la somma di questi archi, al crescere infinito di n , tende a zero.

Questo teorema è un'ovvia estensione di un teorema, stabilito dal prof. Arzelà per le serie di funzioni reali di variabile reale (1), e la dimostrazione di esso si farebbe in modo analogo a quello tenuto pel suo caso dall'Arzelà. Crediamo superfluo ripeterla qui.

Assegnato un numero positivo ε , piccolo a piacere, noi possiamo dunque trovare un valore n' dell'indice n siffatto, che la somma degli archi determinati del contorno di Γ , in ogni cui punto, per un qualche p , risulta:

$$\left| \sum_n^{n'+p} \mathcal{F}_n(x) \right| \cong \sigma,$$

sia minore di ε .

Se x è un punto interno a Γ , di cui l rappresenta la minima distanza dal contorno, e se poniamo, come sopra, pei punti di questo, $x = t$, sarà a più forte ragione minore di ε , la somma degli archi determinati, in ogni cui punto, per un qualche p , è:

$$\left| \sum_n^{n'+p} \frac{\mathcal{F}_n(t)}{t-x} \right| \cong \frac{\sigma}{l}.$$

Allora, osservando che, per ogni p fisso, può scriversi:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_n^{n'+p} \frac{\mathcal{F}_n(t)}{t-x} dt = \sum_n^{n'+p} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mathcal{F}_n(t)}{t-x} dt = \sum_n^{n'+p} \mathcal{F}_n(x),$$

noi giungiamo facilmente a concludere, che, nel punto x considerato, deve essere:

$$(5) \quad \left| \sum_n^{n'+p} \mathcal{F}_n(x) \right| < \frac{2G\varepsilon + \sigma\bar{y}}{2\pi l}.$$

Infatti risaliamo alla definizione d'integrale.

Scomposto il contorno dell'area Γ in parti δ mediante i punti di divisione:

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \quad (t_0 \equiv t_n),$$

e, detto θ_{t_h} un punto qualsivoglia dell'arco (t_{h-1}, t_h) , l'integrale

$$\int_{\gamma} \sum_n^{n'+p} \frac{\mathcal{F}_n(t)}{t-x} dt$$

(1) Cfr. la Nota: *Un teorema intorno alla serie di funzioni*. Questi Rendiconti, 12 aprile 1885.

si ottiene come limite della somma

$$(6) \quad \sum_1^h \left[\sum_n^{n'+p} \frac{g_n(\theta t_h)}{\theta t_h - x} \right] \cdot (t_h - t_{h-1}),$$

al decrescere simultaneo ed infinito delle parti δ .

Ma la somma delle parti δ non contenenti nessun punto, in cui risulti

$$\left| \sum_n^{n'+p} \frac{g_n(t)}{t-x} \right| < \frac{\sigma}{l}$$

deve essere, per quanto è stato dianzi detto, minore di ε ; inoltre qualunque sia t , si ha:

$$\left| \sum_n^{n'+p} \frac{g_n(t)}{t-x} \right| < \frac{2G}{l}.$$

Se ne ricava che, per ogni sistema di divisione del contorno di Γ , la (6) può sempre assumere un valore minore, in modulo, di $\frac{2G\varepsilon + \sigma\bar{\gamma}}{l}$; e ciò prova la validità della (5).

Poichè σ ed ε sono numeri fra loro indipendenti, e che possono essere presi piccoli a piacere, noi arriviamo in tal modo al risultato, che, per ogni punto x fisso, interno a Γ , comunque si scelga un numero positivo g , si può sempre trovare nella serie $\Phi(x)$ un termine siffatto, che la somma di quanti si vogliono termini dopo di esso sia, in modulo, minore di g .

La convergenza della serie $\Phi(x)$ nei punti interni a Γ è pertanto dimostrata, e possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Nelle ipotesi poste a principio per le singole funzioni $g_n(x)$, se nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno dell'area Γ (e quindi in tutto il contorno) è soddisfatta, per ogni m , la disuguaglianza

$$\left| \sum_0^m g_n(x) \right| < G,$$

ove G indica una costante positiva, finita, e se la serie

$$\Phi(x) = \sum_0^{\infty} g_n(x)$$

converge lungo il contorno medesimo, si può concludere, che tale serie converge in egual grado in ogni area interna, e però che ivi rappresenta

una funzione ad un valore, analitica, regolare, che è derivabile termine a termine, e via dicendo.

4. Le ipotesi dei due teoremi precedenti producono la convergenza uniforme della serie $\Phi(x)$ in ogni area interna a Γ , condizione non necessaria (1), affinché questa possa ivi rappresentare una funzione ad un valore, analitica, regolare.

Sorge pertanto l'idea di eseguire sull'argomento in discorso, nuove e più generali ricerche (2).

Noi vogliamo qui accennare ad un caso notevole, considerato già nella citata Memoria, la cui trattazione dipende da quanto è stato detto nei primi due paragrafi.

Ammettiamo che la $\Phi(x)$ converga in ogni punto interno a Γ , e che nei punti di un insieme uniformemente denso sul contorno (e quindi in tutto il contorno) la somma dei primi m termini si mantenga, per infiniti valori di m :

$$\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \dots, \bar{m}_n, \dots$$

minore in modulo di una costante positiva, finita.

Da quanto abbiamo esposto nei detti paragrafi, noi ricaviamo che la successione

$$\sum_0^{\bar{m}_1} g_n(x), \sum_0^{\bar{m}_2} g_n(x), \sum_0^{\bar{m}_3} g_n(x), \dots, \sum_0^{\bar{m}_n} g_n(x), \dots,$$

in ogni area Γ' , interna a Γ , tende uniformemente alla $\Phi(x)$: questa ivi rappresenta pertanto una funzione ad un valore, analitica, regolare, e di più converge in equal grado semplicemente (3). Sarà inoltre derivabile termine a termine se la serie delle derivate è convergente, integrabile termine a termine (lungo una linea finita contenuta in Γ') se è convergente la serie degli integrali.

Concludendo possiamo dunque enunciare il teorema:

Sotto le solite ipotesi per le singole funzioni $g_n(x)$, se la serie

$$\Phi(x) = \sum_0^{\infty} g_n(x)$$

è in ogni punto interno a Γ convergente, e se, nei punti di un insieme

(1) Cfr. Runge, l. c.

(2) Cfr. la mia Memoria citata in principio.

(3) Cfr. Dini, *Fondamenti per la teoria delle funzioni* ecc., pag. 103.

uniformemente denso sul contorno (e quindi in tutto il contorno) si ha, per infiniti valori di m :

$$\left| \sum_0^m g_n(x) \right| < G,$$

ove G indica una costante positiva, finita, si può concludere, che, in ogni area Γ' interna a Γ , quella serie rappresenta una funzione ad un valore, analitica, regolare, e di più converge in egual grado semplicemente; che è derivabile termine a termine, se la serie delle derivate è convergente; integrabile termine a termine (lungo una linea finita, contenuta in Γ) se è convergente la serie degli integrali.

Osservazione: I teoremi precedenti si estendono senza alcuna difficoltà alle serie, i cui termini sono funzioni ad un valore, analitiche, regolari nell'area esterna ad una curva finita, chiusa.

È anche ovvio che considerazioni analoghe possono farsi per i prodotti infiniti ed in generale per ogni modo di rappresentare una funzione come limite di una successione ordinata, infinita di funzioni, ad un valore, analitiche, regolari.

Fisica. — Birifrangenza elettrostatica nei miscugli liquidi.

Nota del dott. A. ZAMPETTI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. I liquidi isolanti sotto l'azione di un campo elettrico uniforme acquistano le proprietà di un cristallo uniassico con l'asse parallelo alle linee di forza, e l'esperienza dimostra che il ritardo δ fra il raggio ordinario e lo straordinario, per ogni centimetro di dielettrico attraversato, è proporzionale al quadrato dell'intensità del campo elettrico agente. Di qui la legge di Kerr:

$$\delta = K \frac{V^2 l}{a^2},$$

ove V è la differenza di potenziale fra gli elettrodi posti alla distanza a , l è il cammino percorso dal raggio incidente attraverso il campo indotto e K rappresenta la costante di Kerr relativa al mezzo cimentato.

Il comportamento di questa costante nei miscugli liquidi è stato oggetto di studio per parte del Quincke (1) e dello Schmidt (2). Il Quincke, mescolando il solfuro di carbonio in diverse proporzioni con l'etere, e misurando di ciascun miscuglio la costante K corrispondente, osserva che questa non è

(1) Wied. Annal., XXIX, pag. 729, 1883.

(2) Drud. Annal., IV, 7, pag. 142, 1902.

una costante additiva, vale a dire che non può essere calcolata con una relazione del tipo:

$$K = \frac{K_1 V_1 + K_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

ove K_1 e K_2 rappresentano le costanti dei componenti il miscuglio, e V_1 e V_2 i rispettivi volumi. Infatti ecco i risultati che egli ottiene:

Parti di		K · 10 ⁶ ottenuto	K · 10 ⁶ calcolato	Differenza
zolfo	etere			
3	1	27,25	22,64	4,61
1	1	19,48	12,91	6,57
1	5	4,42	— 0,06	4,36

e poichè le differenze fra i valori di K osservati e quelli calcolati sono molto forti, ciò starebbe a provare che la formula scritta non rappresenta esattamente il fenomeno in questione.

Lo Schmidt poi, in seguito alle ricerche fatte sui miscugli di zolfo di carbonio con benzolo e con cloroformio, arriva alla conclusione che non esiste alcuna legge semplice, che regoli i valori della costante di Kerr nei miscugli.

2. Nonostante le ricerche precedenti, ho voluto estendere lo studio del fenomeno ad un maggior numero di miscugli ed in ispecial modo a quelli tra sostanze che per rapporto alla birifrangenza elettrostatica hanno segno diverso.

Il condensatore da me adoperato per assoggettare i liquidi all'azione di un campo elettrostatico è dello stesso tipo di quello di cui si è servito lo Schmidt, per cui trovo superfluo ripeterne la descrizione.

Le misure della costante K sono state fatte adottando un metodo di paragone, per eliminare così la determinazione diretta del potenziale, la cui incertezza può molto influire sui risultati finali, dato che le birifrangenze crescono come i quadrati dei potenziali corrispondenti. La sostanza adoperata per paragonare fra di loro le birifrangenze eccitate da uno stesso campo elettrico e in essa e in un altro liquido qualunque, è stato il zolfo di carbonio. Ora Lemoine (1) ha trovato che la costante corrispondente al zolfo è $3,70 \cdot 10^{-7}$, per cui se misuro le birifrangenze

$$d_1 = K_1 \frac{V^2 l_1}{a_1^2},$$

$$d_2 = 3,70 \cdot 10^{-7} \frac{V^2 l_2}{a_2^2},$$

(1) Compt. rend. 122, pag. 835 (1896).

eccitata dalla stessa differenza di potenziale fra le armature di due condensatori l'uno pieno del miscuglio da cimentare e l'altro pieno di solfuro, potrà da esse dedurre il valore di K_1 , sia in modo relativo, sia anche in modo assoluto per mezzo della relazione:

$$K_1 = \frac{a_1^2 l_2}{a_2^2 l_1} 3,70 \cdot 10^{-7} \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

che dalle due precedenti si ricava.

I valori di δ_1 e δ_2 sono stati misurati mediante un compensatore a vetro. Una molla comprimibile con una vite a testa graduata scorrente lungo un regolo anch'esso graduato, trasmette la propria pressione ad una lastrina di vetro, la quale, se si gira opportunamente tutto il sistema, può essere compressa sia parallelamente che normalmente alle linee di forza. Misurata alla luce del sodio mediante un compensatore di Babinet la birifrangenza eccitata nel vetro da una pressione determinata, potevo in tal modo compensare e quindi misurare le birifrangenze elettrostatiche dei liquidi.

Ricordiamo che il fondamento del mio metodo di misura è la costanza del potenziale durante una stessa serie di determinazioni delle quantità δ_1 e δ_2 che sono state dedotte come media di sei letture successive, e poichè ogni lettura si è discostata pochissimo dalla media, così se ne può concludere che la disposizione seguente è stata molto opportuna per lo scopo richiesto.

In derivazione con i poli di una Holtz a due dischi giranti, mantenuta in velocità costante da un piccolo motore elettrico, ho posto da una parte un sistema di punte (—) e piano (+), e dall'altra, attraverso a resistenze ad acqua, uno o l'altro dei condensatori ed un elettrometro Thomson per altri potenziali con ago e quadranti verticali. Ora variando la distanza delle punte dal piano varia anche il potenziale in tutto il circuito, per cui utilizzando questo apparecchio semplicissimo ho potuto, per ogni serie di misure sui due condensatori, ricondurre costantemente il potenziale al valore corrispondente alla prima lettura, mantenendo l'indice dell'ago sempre nella medesima posizione rispetto ad una graduazione empirica.

Riepilogando, fissati i due condensatori, l'uno col solfuro e l'altro col miscuglio da analizzare, in modo che il piano di polarizzazione della luce incidente fosse a 45° dalle linee di forza (e ciò si è ottenuto cercando quella posizione dei nicols e dei condensatori alla quale corrispondeva una birifrangenza elettrostatica nulla e girando poi i nicols di 45°) li ponevo successivamente sotto l'azione del campo elettrico e facevo le letture al compensatore a vetro, avendo cura che ad ognuna di esse corrispondesse sempre lo stesso valore del potenziale.

3. I liquidi dei quali ho studiato i miscugli nella proporzione di 10 in 10 sono il *solfuro di carbonio* (CS_2), il *benzolo* (C_6H_6), il *clorofornio*

(CHCl_3) ed il *bromoformio* (CHBr_3): i primi due hanno la birfrangenza elettrostatica positiva, gli altri due la negativa. Le costanti ad essi corrispondenti le ho trovate, col mio metodo di misura, molto coincidenti con quelle date dallo Schmidt e ciò mi convince che il metodo adottato permette di misurare con precisione molto soddisfacente i valori di K. Ecco quelli relativi ai quattro liquidi adoperati:

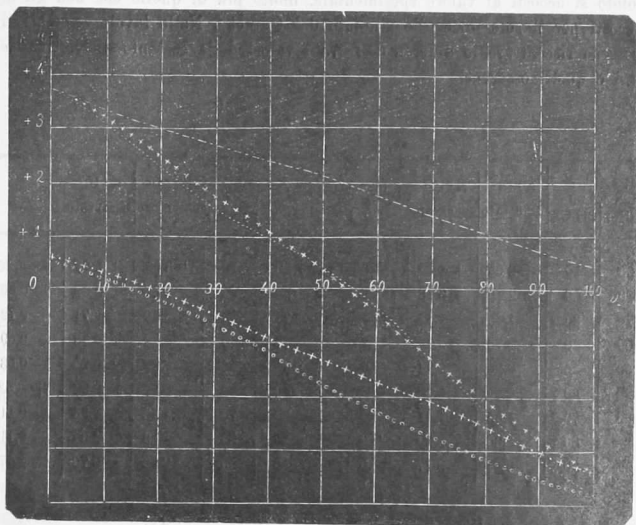
Solfuro di carbonio	+ 3,70.10 ⁻⁷
Benzolo	+ 0,46 —
Cloroformio	— 3,80 —
Bromoformio	— 3,34 —

Il primo miscuglio analizzato è stato quello di solfuro di carbonio con cloroformio per verificare le anomalie riscontrate dallo Schmidt. L'A. infatti ha visto effetti singolari specialmente quando il CHCl_3 entra nel miscuglio con le proporzioni del 10 e del 40 per cento, perchè in tal caso non ha potuto mai compensare perfettamente la birfrangenza eccitata, ottenendo soltanto un minimo d'intensità luminosa. Ho supposto fin da principio che ciò fosse dovuto ad un effetto di dispersione, che sarebbe più forte nel caso di quei tali miscugli, e questa previsione è stata confermata dall'esperienza. Infatti, sottoposti successivamente quei due miscugli all'azione del campo esterno, ho cercato portare nell'un caso e nell'altro il potenziale ad un valore al quale corrispondesse una birfrangenza elettrostatica uguale alla birfrangenza naturale di una mica sottilissima. Allora, se la luce adoperata era monocromatica (lampada a sodio), la compensazione con la mica si otteneva perfettamente, mentre che con la luce bianca (acetilene) si riusciva solo ad ottenere un minimo d'intensità luminosa. Nel corso delle mie esperienze ho potuto notare che miscugli fra gli stessi liquidi ma in proporzioni diverse, presentano spesso il fenomeno di acquistare birfrangenze elettrostatiche più o meno compensabili col compensatore a vetro, sicchè è probabile che l'effetto visto dallo Schmidt sia realmente dovuto a dispersione della luce bianca, dispersione variabile da miscuglio a miscuglio.

Credo opportuno far notare un effetto diverso che mi è occorso osservare. Appena preparato un miscuglio ed assoggettato all'azione del campo, tanto il potenziale quanto la birfrangenza elettrostatica del liquido non assumevano istantaneamente il valore corrispondente al campo esterno, sibbene passavano per gradi successivi e dopo aver tenuto il miscuglio per qualche tempo soggetto all'induzione elettrica, ogni qual volta si caricavano le armature del condensatore, l'effetto visto in principio non era più riscontrabile, sicchè mi sembra che esso sia dovuto al fatto, che inizialmente la forza elettrica debba compiere l'ufficio di rendere il miscuglio molto più omogeneo di quello che possa farsi agitando meccanicamente i due liquidi.

4. I valori trovati per K nei diversi miscugli possono dedursi dalle curve che seguono, le quali sono state disegnate prendendo per ordinate i

- I CS₂ con CHCl₃
- II +++++ CS₂ con CHBr₃
- III cccccccc C₆H₆ con CHCl₃
- IV +++++ C₆H₆ con CHBr₃
- V CS₂ con C₆H₆



valori di $K \cdot 10^7$ e per ascisse i volumi di un componente per ogni cento parti dell'altro.

5. Esaminando queste curve, possiamo osservare che esse in generale tendono ad assumere un andamento rettilineo, vale a dire che la relazione cercata fra la costante K di un miscuglio e le costanti ed i volumi dei componenti è del tipo lineare:

$$K = \alpha + \beta \frac{v}{100}.$$

Dette K_1 e K_2 le costanti dei componenti e v_2 il volume del liquido la cui costante è K_2 , poichè per $v_2 = 0$ si ha $K = K_1$, quindi $\alpha = K_1$ e

per $v_2 = 100$ si ha $K = K_2$ quindi $\beta = K_2 - K_1$, la formula precedente diventa

$$K = K_1 + (K_2 - K_1) \frac{v_2}{100}$$

analoga a quella da cui è partito il Quincke. Però per l'andamento stesso delle curve è da supporre che nei casi da me studiati il valore di K calcolato si accosti al valore sperimentale, molto più di quello che non gli si accosti per il solo miscuglio studiato dal Quincke. Nelle tavole seguenti si possono riscontrare le differenze Δ fra i valori della costante di Kerr calcolati e quelli osservati.

I.

Parti di		K · 10 ⁷	K · 10 ⁷	Δ
CS ₂	CH Cl ₃	calcolato	osservato	
90	10	+ 2,95	+ 3,00	- 0,05
80	20	2,20	2,23	- 0,03
70	30	1,45	1,49	- 0,04
60	40	0,70	0,98	- 0,28
50	50	- 0,05	0,34	- 0,29
40	60	0,80	0,00	+ 0,80
30	70	1,55	- 1,41	+ 0,14
20	80	2,30	2,29	+ 0,01
10	90	3,05	3,17	- 0,12

II.

Parti di		K · 10 ⁷	K · 10 ⁷	Δ
CS ₂	CH Br ₃	calcolato	osservato	
90	10	+ 3,00	+ 3,27	- 0,27
80	20	2,30	2,36	- 0,06
70	30	1,59	1,71	- 0,12
60	40	0,89	0,98	- 0,09
50	50	0,22	0,25	- 0,03
40	60	- 0,52	0,00	+ 0,52
30	70	1,22	- 1,33	+ 0,11
20	80	1,93	2,04	- 0,11
10	90	2,63	2,70	- 0,07

III.

Parti di		K · 10 ⁷	K · 10 ⁷	Δ
C ₆ H ₆	CH Cl ₃	calcolato	osservato	
90	10	+ 0,04	0,00	+ 0,04
80	20	- 0,39	- 0,24	+ 0,15
70	30	0,81	0,66	+ 0,15
60	40	1,24	1,17	- 0,07
50	50	1,67	1,77	- 0,10
40	60	2,09	2,37	- 0,28
30	70	2,56	2,73	- 0,17
20	80	2,84	3,20	- 0,36
10	90	3,37	3,56	- 0,19

IV.

Parti di		K · 10 ⁷	K · 10 ⁷	Δ
C ₆ H ₆	CH Br ₃	calcolato	osservato	
90	10	+ 0,08	+ 0,15	- 0,07
80	20	- 0,30	0,00	+ 0,30
70	30	0,68	- 0,50	+ 0,18
60	40	1,07	3,87	+ 0,29
50	50	1,44	1,43	+ 0,01
40	60	1,82	1,67	+ 0,15
30	70	2,20	2,03	+ 0,17
20	80	2,58	2,47	+ 0,11
10	90	2,96	3,04	- 0,08

V.

Parti di		K · 10 ⁷	K · 10 ⁷	Δ
CS ₂	C ₆ H ₆	calcolato	osservato	
90	10	+ 3,38	+ 3,33	+ 0,05
80	20	3,06	3,00	+ 0,06
70	30	2,73	2,66	+ 0,07
60	40	2,41	2,34	+ 0,07
50	50	2,12	2,15	- 0,03
40	60	1,76	1,67	+ 0,09
30	70	1,44	1,39	+ 0,05
20	80	1,11	1,05	+ 0,06
10	90	0,79	0,70	+ 0,09

Di tutti i miscugli studiati, quello che più segue da vicino la legge lineare è il miscuglio tra solfuro e benzolo, ed infatti la curva corrispondente è quasi una retta, come ha trovato anche lo Schmidt. Invece per i primi due miscugli c'è molta divergenza fra i valori calcolati e quelli osservati, specialmente in vicinanza della birifrangenza nulla e negli altri due le differenze Δ non sono molti forti.

Ora se teniamo conto di tutti gli errori inevitabili nel calcolo della costante di Kerr: errori dovuti specialmente alla variazione di elasticità della molla del compensatore a vetro, variazione che influisce sulla determinazione delle birifrangenze; errori causati dal cambiamento della temperatura ambiente; ed infine di tutti gli altri errori di osservazione, possiamo renderci ragione delle differenze ottenute, se però queste differenze non sono molto forti. Nei pochi casi di forti divergenze dalla formula, non si possono certamente invocare a difesa gli errori di osservazione, ma se consideriamo che in generale la legge e l'esperienza vanno fra di loro d'accordo con approssimazione soddisfacente, possiamo concludere che la costante di Kerr nei miscugli liquidi studiati e specialmente negli ultimi tre, può ritenersi legata da una relazione lineare ai volumi ed alle costanti dei componenti.