ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 febbraio 1904.

P. VILLARI, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

Nella mia Nota precedente [2], partendo da considerazioni di geometria ellittica, ho dimostrato il teorema:

Fissata una qualunque rappresentazione equivalente della sfera sopra sè stessa, esistono infinite coppie di superficie applicabili (dipendenti da due funzioni arbitrarie), che hanno per immagini di Gauss quelle due date figure sferiche equivalenti. La ricerca di queste coppie dipende dall'integrazione di un'equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine.

Scopo della prima parte della presente Nota è di rendere quella dimostrazione indipendente dalla geometria ellittica e di presentare inoltre sotto la sua forma più generale l'equazione a derivate parziali da cui dipende il problema.

In secondo luogo mi occuperò nuovamente della ricerca di quelle coppie di superficie applicabili per le quali alle assintotiche dell'una superficie corrisponde un sistema coniugato sull'altra e dimostrerò direttamente, fondandomi sulla teoria delle deformazioni infinitesime, che queste superficie sono tutte e sole le *associate* delle superficie applicabili sulla sfera. Si vedrà in fine che le superficie in discorso ammettono una deformazione continua ad

[1] Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.
[2] Seduta del 5 gennaio 1904.

un parametro che non ne altera il carattere; questa corrisponde alla trasformazione di Lie-Bonnet per le superficie associate di curvatura costante positiva.

1. Abbiasi una rappresentazione qualunque equivalente (che conservi le aree) della sfera di raggio $=1$ sopra sè stessa. Riferiamo le due figure sferiche a due sistemi coordinati (u, v) *corrispondenti*, e siano

$$
(1)\qquad \begin{cases} ds^2_1 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \\ \overline{ds}^2_1 = \bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2 \end{cases}
$$

le espressioni dei rispettivi elementi lineari delle due figure; a causa della conservazione delle aree sarà

$$eg - f^2 = \bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2,$$

e porremo

$$(2)\qquad \varDelta = eg - f^2 = \bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2.$$

Indicando con P, $\overline{P}$ due punti qualunque corrispondenti delle due figure e con

$$X_3, Y_3, Z_3$$
$$\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$$

le loro rispettive coordinate, leghiamo alla prima figura un triedro trirettangolo

$$(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, 3$$

col vertice in P il cui terzo spigolo è la normale alla sfera, e alla seconda figura colleghiamo analogamente il triedro:

$$(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Se $p, q, r; p_1, q_1, r_1$ denotano le rotazioni del primo triedro, sussisteranno le formole fondamentali:

$$
(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = r\,X_2 - q\,X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = p\,X_3 - r\,X_1, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = q\,X_1 - p\,X_2 \\[2ex] \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = r_1\,X_2 - q_1\,X_3, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = p_1\,X_3 - r_1\,X_1, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = q_1\,X_1 - p_1\,X_2, \end{cases}
$$

e le rotazioni saranno legate dalle relazioni caratteristiche:

$$
(4)\qquad \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q\,r_1 - q_1\,r, \quad \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r\,p_1 - r_1\,p,
$$
$$
\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p\,q_1 - p_1\,q.
$$

Per il secondo triedro indicheremo le rotazioni con

$$\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}\ ;\ \overline{p}_1, \overline{q}_1, \overline{r}_1$$

ed avremo formole perfettamente analoghe alle (3), (4).

Ora diciamo che, scegliendo in modo opportuno la giacitura relativa dei due triedri

$$(X_i, Y_i, Z_i)\ ,\ (\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i),$$

possiamo rendere

$$\overline{r} = r\ ,\ \overline{r}_1 = r_1\ . \tag{5}$$

Per ciò (ripetendo quanto è esposto al n. 4 della Nota precedente) osserviamo che se $\varphi, \overline{\varphi}$ indicano le rispettive inclinazioni delle direzioni

$$(X_1, Y_1, Z_1)\ ,\ (\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \overline{Z}_1)$$

sulle linee $v = \mathrm{cost}$ delle due figure sferiche; si hanno le formole ([1]):

$$\left\{\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{\Delta}}{e}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\ r_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{e}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \overline{r} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\overline{e}}\overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}} - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u}\ ,\ \overline{r}_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\overline{e}}\overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}} - \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v}\ ,\end{aligned}\right.$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$ riferendosi al ds_1 e gli altri $\overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}, \overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}$ al $\overline{ds}_1$.

Per soddisfare le (5) basta dunque legare $\varphi, \overline{\varphi}$ fra loro per modo che sia:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial u} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{e}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\overline{e}}\overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}\\ \frac{\partial(\varphi - \overline{\varphi})}{\partial v} &= \frac{\sqrt{\Delta}}{e}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\overline{e}}\overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ora, essendo $= +1$ la curvatura di ambedue le forme differenziali (2), si ha ([2]):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{e}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{e}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\overline{e}}\overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\overline{e}}\overline{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}\right] = \sqrt{\Delta}\ .$$

(1) V. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, pag. 181.

(2) *Lezioni*, vol. I, pag. 77, formola (V).

onde segue che scelta $\overline{\varphi}$ ad arbitrio nelle (6), p. e. $\overline{\varphi}=0$, le (6) sono compatibili e dànno φ con una quadratura che introduce una costante arbitraria.

Possiamo dunque supporre, e supporremo, la giacitura dei due triedri scelta in guisa che le (5) siano soddisfatte.

2. Cerchiamo ora di determinare quattro funzioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ di u, v tali che risultino contemporaneamente differenziali esatti le espressioni

$$(\xi X_1 + \eta X_2)\, du + (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2)\, dv$$
$$(\xi \overline{X}_1 + \eta \overline{X}_2)\, du + (\xi_1 \overline{X}_1 + \eta_1 \overline{X}_2)\, dv$$

e le altre che se ne deducono cangiando le lettere $X, \overline{X}$ in $Y, \overline{Y}$, poi in $Z, \overline{Z}$. Se ciò è possibile e poniamo:

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \int (\xi X_1 + \eta X_2)\, du + (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2)\, dv, \\ y = \int (\xi Y_1 + \eta Y_2)\, du + (\xi_1 Y_1 + \eta_1 Y_2)\, dv, \\ z = \int (\xi Z_1 + \eta Z_2)\, du + (\xi_1 Z_1 + \eta_1 Z_2)\, dv; \end{cases}$$

$$(7^*)\qquad \begin{cases} \overline{x} = \int (\xi \overline{X}_1 + \eta \overline{X}_2)\, du + (\xi_1 \overline{X}_1 + \eta_1 \overline{X}_2)\, dv, \\ \overline{y} = \int (\xi \overline{Y}_1 + \eta \overline{Y}_2)\, du + (\xi_1 \overline{Y}_1 + \eta_1 \overline{Y}_2)\, dv, \\ \overline{z} = \int (\xi \overline{Z}_1 + \eta \overline{Z}_2)\, du + (\xi_1 \overline{Z}_1 + (\eta_1 \overline{Z}_2)\, dv; \end{cases}$$

i due punti (x, y, z), $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ descriveranno due superficie $S, \overline{S}$ collo stesso elemento lineare

$$(8)\qquad ds^1 = (\xi^2 + \eta^2)\, du^2 + 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1)\, du\, dv + (\xi^2{}_1 + \eta^2{}_1)\, dv^2,$$

e quindi applicabili l'una sull'altra; inoltre $S, \overline{S}$ avranno per immagini sferiche precisamente le due figure date.

Ora le condizioni d'integrabilità per le (7) si traducono nelle tre equazioni seguenti cui debbono soddisfare le quattro traslazioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 181)

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - \eta_1 r \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi_1 r - \xi r_1, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \eta p_1 - \xi q_1 + \xi_1 q - \eta_1 p = 0.$$

Le condizioni d'integrabilità per le (7*) sono perfettamente analoghe alle precedenti; ma poichè le rotazioni r, r_1 conservano secondo le (5) il medesimo valore pel secondo triedro, le equazioni (9) restano inalterate mentre la (10) diventa

$$\eta \bar{p}_1 - \xi \bar{q}_1 + \xi_1 \bar{q} - \eta_1 \bar{p} = 0 . \tag{10*}$$

Le quattro funzioni incognite ξ, η ; ξ_1, η_1 debbono dunque unicamente soddisfare il sistema lineare delle quattro equazioni (9), (10), (10*). Segue già di qui l'esistenza di infinite coppie di superficie applicabili, coll'assegnata rappresentazione sferica; ma noi vogliamo ora trasformare questo sistema lineare in un'unica equazione lineare del 2° ordine per una sola funzione incognita.

3. Per ottenere l'indicata trasformazione basta definire la superficie S in coordinate tangenziali

$$(X_3, Y_3, Z_3 ; W),$$

indicando W la distanza del piano tangente di S dall'origine, ed esprimere per mezzo di W e delle sue derivate prime e seconde le rotazioni $p, q ; p_1, q_1$. A tale scopo partiamo dalle formole di Weingarten [1]

$$x = W X_3 + \nabla(W, X_3), \tag{11}$$

dove il parametro differenziale misto $\nabla(W, X_3)$ si intende calcolato rispetto al ds^2_1 sferico dato dalla prima delle (1). Conviene ora calcolare dalle (11) le derivate $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ come segue.

Derivando rapporto ad u, v le identità

$$\Sigma \nabla(W, X_3) \cdot \frac{\partial X_3}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u}, \Sigma \nabla(W, X_3) \frac{\partial X_3}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v}, \tag{12}$$

si hanno in primo luogo le formole

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma \frac{\partial \nabla(W, X_3)}{\partial u} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial u} = W_{11}, \quad \Sigma \frac{\partial \nabla(W, X_3)}{\partial u} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial v} = W_{12} \\ &\Sigma \frac{\partial \nabla(W, X_3)}{\partial v} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial u} = W_{12}, \quad \Sigma \frac{\partial \nabla(W, X_3)}{\partial v} \cdot \frac{\partial X_3}{\partial v} = W_{22}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

indicando con W_{rs} le derivate seconde covarianti di W rispetto al ds^2_1.

[1] *Lezioni*, vol. I, pag. 172.

Se in queste poniamo per $\frac{\partial X_3}{\partial u}, \frac{\partial X_3}{\partial v}$ i valori $q\,X_1 - p\,X_2$, $q_1 X_1 - p_1 X_2$ dati dalle (3) e ricordiamo che si ha

$$p\,q_1 - p_1\,q = \sqrt{e\,g - f^2} = \sqrt{\Delta}\,,$$

risolvendo ne deduciamo le altre:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{p W_{12} - p_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}}\,, \quad \Sigma X_2 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{q W_{12} - q_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\Sigma X_1 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{p W_{22} - p_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}}\,, \quad \Sigma X_2 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{q W_{22} - q_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Associando a queste le identità

$$\Sigma X_3 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u}\,, \quad \Sigma X_3 \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v}\,,$$

che seguono dalla

$$\Sigma X_3 F(W, X_3) = 0$$

derivando rapporto ad u, v con riguardo alle (12), otteniamo in fine, risolvendo rapporto a

$$\frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v}\,,$$

le formole

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial u} &= \frac{p W_{12} - p_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}} X_1 + \frac{q W_{12} - q_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}} X_2 - \frac{\partial W}{\partial u} X_3 \\ \frac{\partial F(W, X_3)}{\partial v} &= \frac{p W_{22} - p_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}} X_1 + \frac{q W_{22} - q_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}} X_2 - \frac{\partial W}{\partial v} X_3\,. \end{aligned}\right.$$

Da queste, derivando le (11) rapporto ad u, v, troviamo

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left(\frac{p W_{12} - p_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}} + q W\right) X_1 + \left(\frac{q W_{12} - q_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}} - p W\right) X_2 \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \left(\frac{p W_{22} - p_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}} + q_1 W\right) X_1 + \left(\frac{q W_{22} - q_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}} - p_1 W\right) X_2 \end{aligned}\right.$$

e confrontando colle (7) ne deduciamo le espressioni cercate per le traslazioni:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{p W_{12} - p_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}} + q W\,, \quad \eta = \frac{q W_{12} - q_1 W_{11}}{\sqrt{\Delta}} - p W \\ \xi_1 &= \frac{p W_{22} - p_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}} + q_1 W\,, \quad \eta_1 = \frac{q W_{22} - q_1 W_{12}}{\sqrt{\Delta}} - p_1 W\,. \end{aligned}\right.$$

Siccome queste formole valgono per qualunque superficie S, è chiaro *a priori* che i valori (15) di $\xi, \eta;\ \xi_1, \eta_1$ soddisferanno le (9), (10), qualunque sia la funzione W [1].

Ci rimarrà dunque solo da esprimere che con questi valori (15) di $\xi, \eta;\ \xi_1, \eta_1$ anche la (10*) deve essere soddisfatta. Troviamo così per la funzione incognita W l'equazione lineare del 2° ordine:

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned}&(p_1\bar{q}_1 - q_1\bar{p}_1)\,W_{11} + (q_1\bar{p} - p\bar{q}_1 + q\bar{p}_1 - p_1\bar{q})\,W_{12} +\\ &+ (p\bar{q} - q\bar{p})\,W_{22} + \sqrt{\Delta}(p_1\bar{p} + q_1\bar{q} - p\bar{p}_1 - q\bar{q}_1)\,W = 0.\end{aligned}$$

È questa, sotto la sua forma più generale, l'equazione da cui dipende la ricerca delle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica.

Se per linee sferiche (u, v) prendiamo le linee (reali) isometriche della rappresentazione della sfera sopra sè stessa, l'equazione (A) assume la forma particolare (a) data al n° 2 della Nota precedente.

4. Alla dimostrazione del teorema fondamentale aggiungiamo le osservazioni seguenti:

Se per le due superficie applicabili S, $\bar{\text{S}}$ corrispondenti ad una soluzione nota W della equazione (A), indichiamo con

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2\ ,\ \bar{D}\,du^2 + 2\bar{D}'\,du\,dv + \bar{D}''\,dv^2$$

le due rispettive seconde forme quadratiche fondamentali, abbiamo le formole [2]:

$$\text{(16)}\qquad \left\{\begin{aligned}&D = \eta p - \xi q\ ,\quad D' = \eta p_1 - \xi q_1\\ &D' = \eta_1 p - \xi_1 q\ ,\quad D'' = \eta_1 p_1 - \xi_1 q_1\end{aligned}\right.$$

e le analoghe:

$$\text{(16*)}\qquad \left\{\begin{aligned}&\bar{D} = \eta\bar{p} - \xi\bar{q}\ ,\quad \bar{D}' = \eta\bar{p}_1 - \xi\bar{q}_1\\ &\bar{D}' = \eta_1\bar{p} - \xi_1\bar{q}\ ,\quad \bar{D}'' = \eta_1\bar{p}_1 - \xi_1\bar{q}_1.\end{aligned}\right.$$

Se nelle (16) introduciamo per $\xi, \eta;\ \xi_1, \eta$, i valori (15) e ricordiamo che si ha:

$$p^2 + q^2 = e\ ,\quad pp_1 + qq_1 = f\ ,\quad p^2_1 + q^2_1 = g,$$

troviamo che esse si riducono alle note formole delle coordinate tangenziali [3]:

$$-D = W_{11} + eW\ ,\quad -D' = W_{12} + fW\ ,\quad -D'' = W_{22} + gW.$$

[1] Del resto per la (10) tale verifica è immediata e per le (9) risulterebbe con qualche sviluppo di calcolo dalle identità:

$$e = p^2 + q^2,\ f = pp_1 + qq_1,\ g = p^2_1 + q^2_1.$$

[2] *Lezioni*, vol. II, pag. 183.

[3] *Lezioni*, vol. I, pag. 173.

Inversamente, confrontando queste colle (16), si trovano nuovamente le formole (15) dimostrate al n.° precedente.

Ora osserviamo che il sistema coniugato comune alle due superficie applicabili $S, \overline{S}$ è formato dalle linee integrali della equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & , & D'\,du + D''\,dv \\ \overline{D}\,du + \overline{D}'\,dv & , & \overline{D}'\,du + \overline{D}''\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

che a causa delle (16), (16*) si risolve nella seguente:

$$(\xi\,\eta_1 - \eta\,\xi_1) \cdot \begin{vmatrix} p\,du + p_1\,dv & , & q\,du + q_1\,dv \\ \overline{p}\,du + \overline{p}_1\,dv & , & \overline{q}\,du + \overline{q}_1\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Ma si ha $\xi\eta_1 - \eta\xi_1 \neq 0$, altrimenti $S, \overline{S}$ si ridurrebbero a curve; quindi l' immagine sferica del sistema coniugato comune è dato dalle linee integrali dell'equazione differenziale:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} p\,du + p_1\,dv & , & q\,du + q_1\,dv \\ \overline{p}\,du + \overline{p}_1\,dv & , & \overline{q}\,du + \overline{q}_1\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Questa dipende unicamente dalle immagini sferiche date, onde si vede che le infinite coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili date dalle soluzioni W della (A) hanno la medesima immagine sferica del sistema coniugato comune. Si ritrovano così completati, i teoremi di Peterson [1].

Osserviamo poi che se a linee coordinate (u, v) prendiamo quelle del sistema coniugato comune (supposto formato di linee reali e distinte) avremo

$$p\overline{q} - q\overline{p} = 0 \quad , \quad p_1\overline{q}_1 - q_1\overline{p}_1 = 0$$

e l'equazione (A) si ridurrà alla nota forma

$$W_{12} + f\,W = 0$$

da cui dipende la ricerca delle superficie che hanno il sistema sferico (u, v) per immagine di un sistema coniugato.

Si può ancora osservare che dalla forma lineare omogenea della (A) risulta che note due diverse coppie $(S, \overline{S})$ $(S', \overline{S}')$ di superficie applicabili colla medesima immagine sferica del sistema coniugato comune, se ne ottengono infinite altre colla costruzione seguente. Indicando con $M, \overline{M}$; $M', \overline{M}'$ quattro punti corrispondenti delle quattro superficie, si congiunga M con M', $\overline{M}$ con $\overline{M}'$

(1) *Lezioni*, vol. II, pag. 43.

e si dividano i segmenti MM', $\overline{M}\overline{M}'$ nei punti P, $\overline{P}$ nel medesimo rapporto costante. I punti P, $\overline{P}$ descriveranno un'altra coppia di superficie applicabili.

5. Veniamo ora alla ricerca particolare di quelle coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili tali che alle assintotiche di S corrisponda sopra $\overline{S}$ un sistema coniugato.

Per compiere questa ricerca direttamente conviene ricordare le formole fondamentali della teoria delle deformazioni infinitesime esposte nel § 31 del vol. II delle mie Lezioni. Essendo S una superficie qualunque, definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \end{cases}$$

si consideri una sua qualunque deformazione infinitesima nella quale i coefficienti D, D', D'' subiscono le variazioni

$$\delta D = \varepsilon \Gamma \quad , \quad \delta D' = \varepsilon \Gamma' \quad , \quad \delta D'' = \varepsilon \Gamma''$$

con ε costante infinitesima. Le funzioni Γ, Γ', Γ'' debbono per ciò soddisfare alle equazioni di Codazzi:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} - \dfrac{\partial \Gamma'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] \Gamma' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma'' = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Gamma''}{\partial u} - \dfrac{\partial \Gamma'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \Gamma + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \Gamma' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \Gamma'' = 0 \end{cases}$$

ed all'altra in termini finiti

$$(19)\quad D\,\Gamma'' + D''\,\Gamma - 2D'\,\Gamma' = 0 .$$

Viceversa ad ogni tale terna $(\Gamma, \Gamma', \Gamma'')$ corrisponde una deformazione infinitesima di S.

Sia ora S_0 la superficie *associata* alla S nella deformazione infinitesima considerata, cioè quella superficie che corrisponde alla S per parallelismo delle normali per tal guisa che le assintotiche di S_0 corrispondano al sistema coniugato di S *permanente* nella deformazione infinitesima. Se indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile P sopra S e con x_0, y_0, z_0 quelle del punto P_0 corrispondente sull'associata, la S_0 si trova con quadrature dalle formole:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = \dfrac{\Gamma''}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases}$$

e dalle analoghe per y_0, z_0. Di qui pei coefficienti

$$E_0, F_0, G_0$$
$$D_0, D'_0, D''_0$$

della S_0 si traggono le altre

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} & E_0 = \frac{E\Gamma'^2 - 2F\Gamma\Gamma' + G\Gamma^2}{EG - F^2}\,,\quad F_0 = \frac{E\Gamma\Gamma'' - F(\Gamma\Gamma'' + \Gamma'^2) + G\Gamma\Gamma'}{EG - F^2}\,, \\ & \qquad G_0 = \frac{E\Gamma''^2 - 2F\Gamma'\Gamma'' + G\Gamma'^2}{EG - F^2} \\ & D_0 = \frac{D\Gamma' - D'\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}}\,,\quad D'_0 = \frac{D'\Gamma' - D''\Gamma}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{D\Gamma'' - D'\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}}\,, \\ & \qquad D''_0 = \frac{D'\Gamma'' - D''\Gamma'}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}\right.$$

e quindi con facile calcolo

$$E_0 G_0 - F_0^2 = \frac{(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)^2}{EG - F^2}\,,\quad D_0 D''_0 - D_0'^2 = \frac{(\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2)(DD'' - D'^2)}{EG - F^2}\,,$$

da cui segue la formola importante pel nostro scopo

$$(22)\qquad K_0 = \frac{D_0 D''_0 - D_0'^2}{E_0 G_0 - F_0^2} = \frac{DD'' - D'^2}{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}$$

ove K_0 indica la curvatura assoluta di S_0.

6. Ciò premesso supponiamo che esista una deformazione *finita* della superficie S tale che sulla deformata $\overline{S}$ le linee assintotiche di S si cangino in un sistema coniugato. Se con

$$\overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2$$

indichiamo la seconda forma quadratica fondamentale di $\overline{S}$, la condizione richiesta si traduce nell'annullarsi dell'invariante simultaneo delle due forme

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2\,,\quad \overline{D}\,du^2 + 2\,\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''\,dv^2\,;$$

si deve avere cioè

$$(23)\qquad D\overline{D}'' + D''\overline{D} - 2D'\overline{D}' = 0\,.$$

La simmetria di questa condizione dimostra che reciprocamente le assintotiche di $\overline{S}$ si distenderanno sopra S in un sistema coniugato. Di più si osservi che se la coppia $(S, \overline{S})$ è di superficie reali, come supponiamo, esse avranno necessariamente reali le assintotiche, cioè negativa la curvatura (¹).

Ora siccome $\overline{D}, \overline{D}', \overline{D}''$ soddisfanno le equazioni di Codazzi e la (23), se poniamo

$$\Gamma = \overline{D} \quad , \quad \Gamma' = \overline{D}' \quad , \quad \Gamma'' = \overline{D}''$$

ne risulta definita, per quanto precede, una deformazione infinitesima di S. E la superficie S_0 associata alla S in questa deformazione infinitesima avrà per la (22) la curvatura

$$K_0 = \frac{D\,D'' - D'^2}{\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2} = +1,$$

cioè la S_0 sarà applicabile sopra la sfera di raggio $= 1$. Così la superficie S supposta è necessariamente associata ad una superficie S_0 di curvatura costante positiva.

Inversamente se la S è associata in una deformazione infinitesima ad una superficie S_0 di curvatura $= +1$, per i corrispondenti valori di $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ avremo dalla (22)

$$\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2 = DD'' - D'^2$$

e ponendo

$$\overline{D} = \Gamma \, , \, \overline{D}' = \Gamma' \, , \, \overline{D}'' = \Gamma''$$

verremo a soddisfare insieme le equazioni di Codazzi e quella di Gauss

$$\frac{\overline{D}\,\overline{D}'' - \overline{D}'^2}{EG - F^2} = K,$$

onde esisterà una deformata (finita) S della $\overline{S}$ sulla quale, a causa della (23) che trovasi verificata, le assintotiche di S si convertiranno in un sistema coniugato.

Abbiamo così dimostrato nuovamente il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie S *ammetta una deformazione che converta le sue linee assintotiche in un sistema*

(¹) E invero se $S, \overline{S}$ avessero curvatura positiva il loro sistema coniugato comune sarebbe certamente reale ed assumendolo a sistema coordinato (u, v) avremmo

$$D' = \overline{D}' = 0$$

e

$$D\overline{D}'' + D''\overline{D} = 0$$

mentre $DD'' > 0$, $\overline{D}\overline{D}'' > 0$, condizioni che si contraddiscono.

coniugato, è che la S *sia associata in una deformazione infinitesima ad una superficie* S_0 *di curvatura costante positiva.*

Si osservi in particolare che se la S_0 è una sfera, ogni sua associata S è una superficie d'area minima e la deformazione è quella ben nota (di Bonnet) che converte le assintotiche nelle linee di curvatura.

7. Le due superficie S, $\overline{S}$ trovandosi nelle medesime condizioni, come alla S corrisponde una superficie associata S_0 applicabile sulla sfera, così alla S corrisponderà un'altra tale superficie $\overline{S}_0$; e facilmente dimostriamo che S_0, $\overline{S}_0$ sono trasformate l'una dell'altra per trasformazione involutoria di Hazzidakis ([1]).

Per l'elemento lineare della S_0 abbiamo infatti dalle (21) la formola:

$$ds_0^2 = \frac{E D'^2 - 2F\overline{D}\,\overline{D} + G\overline{D}^2}{EG - F^2}\,du^2 + 2\,\frac{E\overline{D}'\,\overline{D}'' - F(\overline{D}\,\overline{D}'' + \overline{D}'^2) + G\overline{D}\,\overline{D}'}{EG - F^2}\,du\,dv +$$
$$+ \frac{E\overline{D}''^2 - 2F\overline{D}'\,\overline{D}'' + G\overline{D}'^2}{EG - F^2}\,dv^2 .$$

D'altra parte dalle formole fondamentali della teoria delle superficie e precisamente dalle formole (1) pag. 149, vol. I delle *Lezioni* risulta che ds^2_0 è altresì il quadrato dell'elemento lineare sferico rappresentativo di $\overline{S}$, cioè di $\overline{S}_0$. Le due superficie a curvatura costante positiva S_0, $\overline{S}_0$ sono dunque in tale relazione che l'elemento lineare dell'una coincide coll'elemento lineare sferico dell'altra; esse sono perciò trasformate di Hazzidakis (*Lezioni*, l. c.).

Inversamente risulta di qui, e lo confermeremo con calcolo diretto al n.° seguente, che prese due superficie S_0, $\overline{S}_0$ di curvatura $K_0 = +1$, trasformate di Hazzidakis, ad ogni superficie S associata alla S_0 ne corrisponde una $\overline{S}$, perfettamente determinata, associata alla S_0 e tale che S, $\overline{S}$ sono applicabili, corrispondendo alle assintotiche dell'una un sistema coniugato sull'altra.

8. Ricerchiamo ora direttamente le formole che da una coppia nota S_0, $\overline{S}_0$ di deformate della sfera, nella relazione involutoria di Hazzidakis, fanno derivare le infinite coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili con corrispondenza delle assintotiche ad un sistema coniugato.

Se riferiamo S_0, $\overline{S}_0$ alle loro linee di curvatura (u, v) potremo porre

$$\begin{cases} ds^2_0 = \operatorname{senh}^2\theta\,du^2 + \cosh^2\theta\,dv^2 \\ \overline{ds}^2_0 = \cosh^2\theta\,du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\,dv^2 \end{cases}$$

essendo θ una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0 .$$

([1]) *Lezioni*, vol. II, pag. 436.

Per i corrispondenti triedri principali collegati a S_0, $\overline{S}_0$ abbiamo allora le formole:

$$(a)\ \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - \cosh\theta\, X_3\,, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_1\,, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \cosh\theta\, X_1 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_2\,, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \operatorname{senh}\theta\, X_3\,, & \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\theta\, X_2 \end{cases}$$

$$(\overline{a})\ \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \overline{X}_2 - \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_3\,, & \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} \overline{X}_1\,, \quad \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_1 \\ \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} \overline{X}_2\,, \quad \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \overline{X}_1 - \cosh\theta\, \overline{X}_3\,, & \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = \cosh\theta\, \overline{X}_2\,. \end{cases}$$

Abbiasi ora una *qualunque* superficie S associata alla S_0 in una deformazione infinitesima. L'equazione di Weingarten per le deformazioni infinitesime della S_0 (o della $\overline{S}_0$) è data da

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \cosh 2\theta\,.\, W = 0$$

e basterà prendere una soluzione W di questa per individuare in termini finiti una tale superficie associata S. D' altra parte avremo per la S formole del tipo:

$$(c)\ \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \lambda \operatorname{senh}\theta\, X_1 + \mu \cosh\theta\, X_2 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \mu \operatorname{senh}\theta\, X_1 - \lambda \cosh\theta\, X_2\,, \end{cases}$$

colle analoghe per y, z, essendo λ, μ convenienti funzioni di u, v che si potrebbero subito esprimere per W e le derivate (cfr. n.° 3). Le condizioni d' integrabilità delle (c) si esprimono per le (a) colle due equazioni seguenti cui debbono soddisfare λ, μ:

$$(d)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(\lambda \cosh^2\theta) + \dfrac{\partial}{\partial v}(\mu \cosh^2\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\mu \operatorname{senh}^2\theta) - \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda \operatorname{senh}^2\theta) = 0\,. \end{cases}$$

Ma allora, in forma delle ($\overline{a}$), sono altresì differenziali esatti le espressioni:

$$(-\mu \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \lambda \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2)\, du \ + \ (\lambda \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \mu \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2)\, dv$$

colle analoghe e se indichiamo con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ i loro integrali, avremo le formole

$$(\bar{c}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\mu \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \lambda \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \lambda \cosh\theta\, \overline{X}_1 + \mu \operatorname{senh}\theta\, \overline{X}_2 \,. \end{cases}$$

Il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ descriverà una superficie $\overline{S}$ associata alla S_0 ed avente a comune con S l'elemento lineare:

$$ds = (\lambda^2 \operatorname{senh}^2\theta + \mu^2 \cosh^2\theta)\, du^2 - 2\lambda\mu\, du\, dv + (\lambda^2 \cosh^2\theta + \mu^2 \operatorname{senh}^2\theta)\, dv\,;$$

dunque $S, \overline{S}$ sono applicabili. Di più troviamo

$$\begin{cases} D = -\lambda \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \,,\quad D' = -\mu \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \,,\quad D'' = \lambda \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \\ \overline{D} = \mu \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \,,\quad \overline{D}' = -\lambda \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \,,\quad \overline{D}'' = -\mu \operatorname{senh}\theta \cosh\theta \end{cases}$$

e per ciò

$$D\overline{D}'' + D''\overline{D} - 2D'\overline{D}' = 0\,.$$

Così adunque le assintotiche di S si distendono sopra $\overline{S}$ in un sistema coniugato e reciprocamente.

Si può ancora osservare che il sistema coniugato comune delle due superficie applicabili $S, \overline{S}$ è formato dalle linee (immaginarie)

$$u \pm iv = \text{cost}$$

corrispondente alle assintotiche di $S_0, \overline{S}_0$ e le (d), come facilmente si vede esprimono che questo sistema coniugato è formato da linee geodetiche. Le nostre superficie $S, \overline{S}$ stanno dunque colle superficie a curvatura costante positiva nella medesima relazione come le superficie di Voss, a sistema coniugato geodetico reale, colle superficie pseudosferiche, come del resto era analiticamente facile a prevedersi.

9. Dalle considerazioni del n.° 6 possiamo trarre un'altra interessante proprietà delle attuali superficie applicabili $(S, \overline{S})$. Se, indicando con σ un angolo costante, poniamo

$$D_\sigma = D\cos\sigma + \overline{D}\operatorname{sen}\sigma\,,\quad D'_\sigma = D'\cos\sigma + \overline{D}'\operatorname{sen}\sigma\,,\quad D''_\sigma = D''\cos\sigma + \overline{D}''\operatorname{sen}\sigma$$

è chiaro che $D_\sigma, D'_\sigma, D''_\sigma$ soddisferanno le equazioni di Codazzi come D, D', D''; $\overline{D}, \overline{D}', \overline{D}''$, ma inoltre anche quella di Gauss, poichè, sussistendo la (23), abbiamo

$$D_\sigma D''_\sigma - D'^2_\sigma = \cos^2\sigma\,(DD'' - D'^2) + \operatorname{sen}^2\sigma\,(\overline{D}\overline{D}'' - \overline{D}'^2) = DD'' - D'^2.$$

Esiste dunque una deformata S_σ della S che ha per seconda forma fondamentale

$$D_\sigma \, du^2 + 2D'_\sigma \, du \, dv + D''_\sigma \, du^2$$

D'altronde se poniamo ancora:

$$\bar{D}_\sigma = D_{\frac{\pi}{2}+\sigma} = - D \operatorname{sen} \sigma + \bar{D} \cos \sigma \;, \quad \bar{D}'\sigma = D'_{\frac{\pi}{2}+\sigma} = - D' \operatorname{sen} \sigma + \bar{D}' \cos \sigma ,$$

$$\bar{D}''_\sigma = D''_{\frac{\pi}{2}+\sigma} = - D'' \operatorname{sen} \sigma + \bar{D}'' \cos \sigma ,$$

vediamo che $\bar{D}_\sigma , \bar{D}'_\sigma , \bar{D}''_\sigma$ soddisfanno nuovamente le equazioni di Codazzi e Gauss e di più l'analoga alla (23)

$$D_\sigma \bar{D}''_\sigma + D''_\sigma \bar{D}_\sigma - 2D'_\sigma \bar{D}'_\sigma = 0 .$$

La coppia di superficie applicabili

$$S_\sigma , \; \bar{S}_\sigma = S_{\frac{\pi}{2}+\sigma}$$

gode dunque ancora della proprietà che le assintotiche dell'una si convertono sull'altra in un sistema coniugato, precisamente come la coppia iniziale $S, \bar{S}$, corrisponde a $\sigma = 0$.

Una superficie S della nostra classe (associata di una superficie applicabile sulla sfera) ammette adunque una deformazione continua, dipendente da un parametro σ, durante la quale essa conserva sempre lo stesso carattere, cioè ha sempre un'associata S_0 di curvatura $K_0 = +1$. E se si calcola l'elemento lineare sferico rappresentativo di S_σ facilmente si vede che durante la detta deformazione continua di S_σ l'associata S_0 applicabile sulla sfera subisce una trasformazione continua di Lie-Bonnet. Osserveremo ancora che il sistema (immaginario) di linee geodetiche $u \pm iv = \text{cost}$ si mantiene sempre coniugato in questa deformazione. Nel caso particolare della deformazione continua di una superficie d'area minima il sistema geodetico coniugato che si conserva è formato dalle linee di lunghezza nulla.