ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

due parallele tirate per un punto fisso O alle varie normali di Σ. Occorre e basta perciò che queste normali distino da O della lunghezza costante $\delta = \frac{\sigma}{2}$, cioè tocchino una sfera di centro O e di raggio $R = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$. Dunque:

Le superficie Σ richieste sono le evolventi delle sfere col centro in O.

Così è risoluto geometricamente il problema di trovare le rappresentazioni equivalenti del piano ellittico (sfera euclidea) nelle quali le coppie di punti corrispondenti sono a distanza costante. Il problema d'applicabilità proposto è ora ridotto al problema d'integrazione della corrispondente equazione (a), che qui non verrà ulteriormente discusso.

Terminerò coll'osservare che il problema delle rappresentazioni equivalenti sopra considerate, si può generalizzare e risolvere direttamente sotto la forma seguente:

Trovare quelle rappresentazioni di una superficie di curvatura costante sopra sè stessa nelle quali sono soddisfatte le condizioni seguenti: 1° *le aree delle figure corrispondenti siano in rapporto costante h;* 2° *la distanza geodetica di due punti corrispondenti* P, $\overline{P}$ *sia costante* $= \sigma$.

Si dimostra facilmente che queste rappresentazioni si costruiscono, nel modo più generale, prendendo sulla superficie una serie ∞^1 arbitraria di circoli d'egual raggio e ad ogni punto P di un tale circolo facendo corrispondere quel punto $\overline{P}$ che si trova sulla geodetica normale al circolo, alla distanza σ da P. Per es., nel caso di un piano la formola che lega il raggio R del circolo alle costanti σ, h è data da $R = \frac{\sigma}{1-h}$. Per le rappresentazioni equivalenti $(h = 1)$ la serie di circoli si muta in una serie ∞^1 arbitraria di rette.

Meccanica. — *Casi particolari del problema dei tre corpi.* Nota del Corrispondente Paolo Pizzetti.

Per tre corpi soggetti alle mutue attrazioni newtoniane, gli unici casi nei quali si mantengano invariati i rapporti fra le distanze sono, notoriamente, quelli in cui le posizioni e le velocità iniziali siano tali che i tre corpi, o si mantengano costantemente *allineati*, ovvero restino ai vertici di un *triangolo equilatero*. (Laplace, *Méc. Cél.* Livre X).

Il sig. Lehmann-Filhés (Astr. Nachr. 1891, n. 3033) ha dimostrato che, analogamente al 2° caso, *quattro corpi* [1], possono muoversi in guisa da essere costantemente vertici di un tetraedro regolare, e che, a generalizzazione del 1° caso, corpi in numero qualunque possono restare allineati man-

[1] Sottintendiamo qui e poi: corpi soggetti alle sole mutue attrazioni.

tenendo invariati i rapporti delle distanze. Il sig. Dziobek (Astr. Nachr. 1900, n. 3627) ha studiato casi interessanti di configurazioni piane di 4 corpi, per le quali può aver luogo il movimento omografico. Egli parte dall' osservare che il movimento è certamente omografico (salvo, ben inteso, le ovvie condizioni cui devono soddisfare le velocità iniziali) quando la configurazione sia tale che il potenziale delle mutue attrazioni Newtoniane abbia, in ogni istante, un valore identico a quello che esso avrebbe qualora la forza mutua fosse proporzionale alla semplice distanza. Non è però evidente *a priori* che sia questo l' unico modo per realizzare lo spostamento omografico.

Trattiamo qui generalmente e direttamente il problema del movimento omografico di n corpi attraentisi secondo la legge di Newton (la ricerca vale ugualmente per il caso in cui la forza sia proporzionale ad una potenza qualunque della distanza). Dimostriamo come, nel caso di corpi *non compiani*, l' unico modo di spostamento omografico è quello *omotetico* (centro di omotetia il centro generale di massa) e in particolare nel caso di *quattro* corpi, quello del *tetraedro regolare* studiato dal Lehmann-Filhés è l'*unico* possibile. Pel caso di corpi in uno stesso piano troveremo agevolmente risultati noti, e finalmente per n corpi in linea retta mostreremo come l' invariabilità dei rapporti delle distanze mutue sia (salvo un caso eccezionale) una *conseguenza necessaria* della ipotesi dell' allineamento. Per brevità di discorso ometteremo sempre, in quel che segue, di enunciare le condizioni relative alle velocità iniziali, le quali condizioni risultano evidenti nei singoli casi.

2. *Corpi non contenuti in uno stesso piano*. Rispetto ad assi cartesiani, di direzione invariabile, coll' origine nel centro generale di massa, siano x_i, y_i, z_i le coordinate della massa m_i al tempo t; A_i, B_i, C_i i valori di esse per $t=0$. Siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni di direzione di una terna ortogonale mobile, invariabilmente legata alle rette che uniscono l' origine agli n corpi, e sia θ una funzione del tempo che ha il valore 1 per $t=0$. Potremo scrivere, nell' ipotesi del movimento omografico:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = (\alpha_1 A_i + \alpha_2 B_i + \alpha_3 C_i)\,\theta\,, \\ y_i = (\beta_1 A_i + \beta_2 B_i + \beta_3 C_i)\,\theta\,, \\ z_i = (\gamma_1 A_i + \gamma_2 B_i + \gamma_3 C_i)\,\theta\,. \end{cases}$$

La equazione differenziale

$$(2) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{x_s - x_i}{\varDelta_{si}^3} \qquad (s \neq i)$$

(assumiamo per semplicità uguale ad 1 la costante dell' attrazione) potrà scriversi

$$(2^*) \qquad A_i \frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} + B_i \frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} + C_i \frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} =$$
$$= \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{\alpha_1 (A_s - A_i) + \alpha_2 (B_s - B_i) + \alpha_3 (C_s - C_i)}{D_{si}^3}$$

Abbiamo qui indicato con D_{si}, Δ_{si} i valori, al tempo 0 e al tempo t rispettivamente, della distanza $(m_s\ m_i)$. Si ha evidentemente

$$\Delta_{si} = \theta\, D_{si}\,.$$

Scrivendo le altre due equazioni analoghe alla (2) e moltiplicando poi per $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e sommando si ha

$$\text{(3)} \qquad A_i \mathop{S} \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} + B_i \mathop{S} \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} + C_i \mathop{S} \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} \qquad (i = 1\,,2 \ldots n)$$

dove col simbolo S è indicata la sommatoria estesa alle tre lettere α, β, γ.

Poichè i corpi non sono in uno stesso piano, la matrice dei valori A_i, B_i, C_i $(i = 1\,,2 \ldots n)$ ha caratteristica 3. Quindi dalle equazioni (3) è lecito immaginar dedotti i valori delle quantità

$$\text{(4)} \qquad \theta^2 \mathop{S} \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2}\ ,\quad \theta^2 \mathop{S} \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2}\ ,\quad \theta^2 \mathop{S} \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2}$$

in funzione di quantità che sono indipendenti dal tempo; sicchè, perchè il movimento risulti omografico, occorre che le espressioni (4) si riducano a delle costanti. D'altra parte indicando con π, χ, ϱ le componenti, rispetto agli assi mobili, della velocità angolare di rotazione della terna mobile al tempo t, e valendosi delle note formole

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \varrho\, \alpha_2 - \chi\, \alpha_3 \qquad (1\,,2\,,3)\ (\pi\,,\chi\,,\varrho)$$

è facilissimo esprimere le (4) per mezzo delle π, χ, ϱ e delle loro derivate prime π', χ', ϱ' rispetto al tempo. Si hanno così le equazioni

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \chi^2) &= a \\ -\,2\,\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi &= b \\ 2\,\theta^2\theta'\chi + \theta^3\chi' + \theta^3\varrho\pi &= c \end{aligned} \right.$$

ove a, b, c sono costanti. Se invece che coi coefficienti $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, si combinano le (2) coi coefficienti $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oppure con $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, si ottengono le altre sei equazioni

$$(5')\qquad \left\{\begin{aligned} 2\,\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi &= a' \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \pi^2) &= b' \\ -\,2\,\theta^2\theta'\pi - \theta^3\pi' + \theta^3\varrho\chi &= c' \\ -\,2\,\theta^2\theta'\chi - \theta^3\chi' + \theta^3\pi\varrho &= a'' \\ 2\,\theta^2\theta'\pi + \theta^3\pi' + \theta^3\chi\varrho &= b'' \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\pi^2 + \chi^2) &= c'' \end{aligned}\right.$$

Da tutte queste si deduce subito

$$\theta^3\pi\chi = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\chi\varrho = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\varrho\pi = \text{cost}$$

Sono quindi costanti i rapporti $\pi : \chi : \varrho$, ossia l'asse istantaneo di rotazione ha direzione invariabile rispetto agli assi mobili, e, per conseguenza anche rispetto agli assi fissi. Potremo dunque porre $\pi = \chi = 0$, assumendo l'asse delle z come asse di rotazione; con che le precedenti nove equazioni si ridurranno alle

$$\theta^2\theta'' = \text{cost} \quad , \quad 2\,\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\varrho^2 = \text{cost}$$

alle quali si può soddisfare soltanto in uno di questi due modi

$$(6)\qquad \text{I}^\circ \left\{\begin{aligned} \varrho &= 0 \\ \theta^2\theta'' &= \text{cost} \end{aligned}\right. \qquad \text{II}^\circ \left\{\begin{aligned} \varrho &= \text{cost} \\ \theta &= \text{cost} \end{aligned}\right.$$

il primo dei quali corrisponde a un semplice moto dilatatorio, omotetico, pel quale ognuno dei corpi si muove sulla retta che lo unisce al baricentro generale; il secondo corrisponde a un moto *rigido* di rotazione uniforme attorno all'asse z. Cominciamo dall'escludere subito questa seconda soluzione. Poichè la equazione differenziale

$$\frac{d^2 z_i}{dx^2} = \sum_s m_s \frac{z_s - z_i}{\Delta_{si}^3}$$

darebbe in questo caso

$$(7)\qquad 0 = \sum_s m_s \frac{\mathrm{C}_s - \mathrm{C}_i}{\mathrm{D}_{si}^3} \qquad (s \mp i)$$

Ora, i corpi non essendo compiani, ve ne sarà uno pel quale la C_i ha valore massimo (o maggiore di tutte le altre C, o per lo meno uguale alla C di alcuni altri corpi e maggiore di quella dei rimanenti). Per un tal corpo i termini nella sommatoria son tutti negativi (o per lo meno alcuni nulli, altri negativi) epperò la (7) non può essere soddisfatta.

L'unico possibile caso di movimento omografico, per corpi non compiani, è dunque quello *omotetico* espresso dalla soluzione (6). Possiamo allora sostituire alle (1) le equazioni

$$x_i = \theta A_i \quad , \quad y_i = \theta B_i \quad , \quad z_i = \theta C_i$$

e le (2) diventano

$$A_i \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} \tag{8}$$

Astrazion fatta dalle ovvie condizioni relative alle velocità iniziali, condizione necessaria e sufficiente perchè il movimento si verifichi nel modo richiesto, è quindi che si abbia

$$\frac{1}{A_i} \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} = \frac{1}{B_i} \sum_s m_s \frac{B_s - B_i}{D_{si}^3} = \frac{1}{C_i} \sum_s m_s \frac{C_s - C_i}{D_{si}^3} \tag{9}$$

e che il valor comune di questi tre rapporti sia indipendente dall'indice i. Abbiamo dunque $3n - 1$ equazioni di condizione fra le A_i, B_i, C_i. La condizione che l'origine delle coordinate sia il centro di massa è inclusa in quelle. Infatti, posto

$$\theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K, \tag{10}$$

le (8) (9) possono scriversi

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} = -K A_i \\ &\sum_s m_s \frac{B_s - B_i}{D_{si}^3} = -K B_i \\ &\sum_s m_s \frac{C_s - C_i}{D_{si}^3} = -K C_i \end{aligned} \right. \tag{11}$$

le quali moltiplicate per m_i e sommate rispetto all'indice i danno

$$\sum_i m_i A_i = \sum_i m_i B_i = \sum_i m_i C_i = 0 \tag{12}$$

Dette R, R_0 le distanze di uno qualsiasi dei corpi dall'origine, ai tempi t e *zero* risp^e^., la (10) può scriversi

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{K R_0^3}{R^2}. \tag{13}$$

Ognuno dei corpi si muove dunque verso il centro di massa, come se ivi fosse concentrata una massa $K R_0^3$.

3. *Casi particolari.* Per $n = 4$, assumiamo il piano zy parallelo a quello dei tre corpi m_1, m_2, m_3 per modo che $A_1 = A_2 = A_3$. Allora la prima delle equazioni (11), postovi successivamente $i = 1, 2, 3$, dà

$$m_4 \frac{A_4 - A_1}{D_{14}^3} = - KA_1 \quad , \quad m_4 \frac{A_4 - A_2}{D_{24}^3} = - KA_2 \quad , \quad m_4 \frac{A_4 - A_3}{D_{34}^3} = - KA_3$$

quindi

$$D_{14} = D_{24} = D_{34}$$

Similmente si proverebbe, che $D_{13} = D_{23} = D_{43}$ ecc., sicchè il tetraedro dev'essere *regolare*.

Chiamando D il lato del tetraedro, e lasciando nuovamente arbitraria l'orientazione dei piani coordinati, è facile vedere, tenuto conto delle (12), che le equazioni (11) si riducono tutte a questa unica

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = KD^3$$

la quale determina la costante K da introdurre nella equazione differenziale (13).

Per $n = 8$, se si pone a priori la condizione che i corpi si trovino ai vertici di un parallelepipedo rettangolare, si trova facilmente che la cosa non può verificarsi se non quando i lati sieno eguali, e le 8 masse pure tra loro eguali. Per un ottaedro $(n = 6)$ avente tre piani ortogonali di simmetria, le masse devono essere uguali in due vertici opposti, e le condizioni (11) possono essere soddisfatte da valori positivi delle masse, purchè il rapporto fra la più lunga e la più corta diagonale sia $< \sqrt{3}$.

4. *Casi di n corpi in uno stesso piano.* Assunto come piano xy quello nel quale, per $t = 0$, si trovano gli n corpi, e considerata, come nel n. 2, una terna ortogonale rigidamente connessa ai raggi projettanti i corpi dal centro di massa, le coordinate della massa m_i al tempo t saranno esprimibili con

$$(14) \qquad \begin{cases} x_i = (\alpha_1 A_i + \alpha_2 B_i)\,\theta \\ y_i = (\beta_1 A_i + \beta_2 B_i)\,\theta \\ z_i = (\gamma_1 A_i + \gamma_2 B_i)\,\theta \end{cases}$$

ove $A_i, B_i, 0$ sono i valori delle coordinate stesse per $t = 0$. In modo analogo a quello seguito nel n. 2, otteniamo qui, in luogo delle *nove* equazioni (5) (5'), le sei equazioni

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta^2\theta'' - \theta^3(\chi^2 + \varrho^2) &= a \\ -2\,\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi &= b \\ 2\,\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi &= a' \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \pi^2) &= b' \\ -2\,\theta^2\theta'\chi - \theta^3\chi' + \theta^3\varrho\pi &= 0 \\ 2\,\theta^2\theta'\pi + \theta^3\pi' + \theta^3\chi\varrho &= 0 \end{aligned}\right.$$

delle quali la 1ª paragonata colla 4ª, la 2ª colla 3ª, danno

$$\theta^3(\chi^2 - \pi^2) = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\pi\chi = \text{cost}$$

quindi: $\dfrac{\chi^2 - \pi^2}{\pi\chi} = \text{cost}$, donde $\dfrac{\pi}{\chi} = \text{cost}$. Se si conviene che il piano zy contenga inizialmente l'asse istantaneo di rotazione, potremo quindi porre $\pi = 0$, con che la ultima (15) dà $\chi = 0$ ovvero $\varrho = 0$.

I. Supposto $\pi = 0$, $\varrho = 0$, $\chi \neq 0$, le (15) si riducono a $\theta^2\theta'' = \text{cost}$, $\theta^3\chi^2 = \text{cost}$, $2\,\theta'\chi + \theta\chi' = 0$ e possono essere soddisfatte solo ponendo $\chi = \text{cost}$, $\theta = \text{cost}$. Ciò equivale ad una rotazione rigida uniforme attorno all'asse y. Si avrebbe quindi $y_i = \mathrm{B}_i$ e la seconda equazione differenziale del movimento della massa m_i darebbe

$$0 = \sum_s m_s \frac{\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i}{\mathrm{D}^3_{si}}$$

la quale, come già si disse a proposito della equazione (7), non può essere soddisfatta per tutti i valori dell'indice i. Dobbiamo dunque escludere questo caso.

II. Supposto $\pi = 0$, $\chi = 0$, la rotazione avviene attorno all'asse delle z. Le (14) assumeranno la forma

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} x_i &= \theta\mathrm{A}_i \cos\alpha - \theta\mathrm{B}_i \operatorname{sen}\alpha \\ y_i &= \theta\mathrm{A}_i \operatorname{sen}\alpha + \theta\mathrm{B}_i \cos\alpha \end{aligned}\right. \qquad z_i = 0$$

ove α è un angolo variabile la cui derivata rispetto al tempo è ϱ. Le (15) si riducono a

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta^2\theta'' - \theta^3\varrho^2 &= a \\ 2\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' &= b \end{aligned}\right.$$

ove è facile vedere che, pel teorema della conservazione delle aree, la costante b è nulla.

Derivando le (16) tenuto conto delle (17), si ha quindi

$$(18)\qquad \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{a\, x_i}{\theta^3} \qquad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{a\, y_i}{\theta^3} \right.$$

Il movimento di ognuno dei corpi, relativamente al centro di massa, è dunque Kepleriano. Sostituendo nelle (18) ai primi membri le espressioni date dalla equazione differenziale (2) ed analoghe, abbiamo le equazioni di condizione cui deve soddisfare la configurazione iniziale

$$(19)\qquad \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D^3_{si}} = a\, A_1 \qquad \sum_s m_s \frac{B_s - B_i}{D^3_{si}} = a\, B_i$$

Pel caso di *tre* corpi, assunto l' asse y parallelo alla congiungente delle posizioni iniziali di m_1, m_2, abbiamo $A_1 = A_2$ e le (19) danno

$$m_3 \frac{A_3 - A_1}{D^3_{13}} = a\, A_1 \qquad m_3 \frac{A_3 - A_2}{D^3_{23}} = a\, A_2$$

donde $D_{13} = D_{23}$. Similmente $D_{12} = D_{32}$; il triangolo deve essere *equilatero*, com' è noto.

Le (17) sono soddisfatte, in particolare, col porre $\theta = 1$, $\varrho^2 =$ costante $= -a$. Se dunque la configurazione iniziale soddisfà alle (19), e se la velocità iniziale di rotazione è $= \sqrt{-a}$, il moto è rigido e la velocità di rotazione è costante.

5. *Caso degli n corpi allineati.* Senza mettere a priori la condizione che il movimento sia omografico, porremo

$$(20)\qquad x_i = \alpha\, \theta_i \quad , \quad y_i = \beta \theta_i \quad , \quad z_i = \gamma\, \theta_i$$

ove α, β, γ sono i coseni di direzione della retta che contiene gli n corpi, e le θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_n$ sono certe funzioni del tempo. Sostituendo le espressioni (20) nelle equazioni differenziali

$$(21)\qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{x_s - x_i}{\Delta^3_{si}} \quad , \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{y_s - y_i}{\Delta^3_{si}},$$

moltiplicando la 1ª per β, la 2ª per α e sottraendo:

$$(22)\qquad \theta_i \left(\beta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \alpha \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) + 2\, \frac{d\theta_i}{dt} \left(\beta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt} \right) = 0$$

Escludendo il caso in cui ciascuno dei binomii

$$\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\quad,\quad\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\quad,\quad\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}$$

sia nullo, il che si verifica sol quando la retta si muova parallelamente a sè stessa, la (22) richiede che il rapporto

$$\frac{1}{\theta_i}\frac{d\theta_i}{dt}$$

abbia un valore indipendente dall' indice i, il che è quanto dire che i rapporti

$$\theta_1:\theta_2:\ldots:\theta_n$$

rimangano invariati col tempo. Il movimento è dunque necessariamente omografico. Poniamo pertanto

$$\theta_1=h_1\,\theta\quad,\quad\theta_2=h_2\,\theta\quad,\quad\ldots\,\theta_n=h_n\,\theta$$

dove θ è una funzione del tempo, che ha il valore 1 per $t=0$, e $h_1, h_2\ldots h_n$ sono costanti tali che

$$\sum_i m_i\,h_i=0\,. \tag{23}$$

Supposti i corpi allineati nell'ordine $1, 2\ldots n$, e ammesso che i coseni α, β, γ siano relativi alla retta percorsa da 1 verso n, avremo

$$\varDelta_{si}=\pm(h_s-h_i)$$

dove si ha da scegliere il segno $+$ o $-$, secondo che s è $>$ o $<i$.

La (21) può allora scriversi

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{x_i}{(\theta h_i)^3}\sum_s\frac{\pm\,m_s\,h_i^2}{(h_s-h_i)^2}$$

od anche

$$h_i\,\frac{d^2(\alpha\theta)}{dt^2}=\frac{\alpha}{\theta^2}\sum_s\frac{\pm\,m_s}{(h_s-h_i)^2}$$

La prima di queste esprime che il movimento di ogni corpo rispetto al centro di massa è Kepleriano.

La seconda mostra che le posizioni iniziali dei corpi devono esser tali che il rapporto

$$\frac{1}{h_i}\sum_s\frac{\pm\,m_s}{(h_s-h_i)^2}$$

sia indipendente da i, il che ha luogo ad $n-1$ equazioni di condizione, delle quali, com'è facile vedere, la (23) è conseguenza identica.

Nel caso di *tre* corpi, tali condizioni possono ridursi alle due

$$\frac{h_2\, m_2}{(h_2-h_1)^2}+\frac{h_2\, m_3}{(h_3-h_1)^2}=-\frac{h_1\, m_1}{(h_1-h_2)^2}+\frac{h_1\, m_3}{(h_3-h_2)^2}$$

$$m_1\, h_1 + m_2\, h_2 + m_3\, h_3 = 0 \tag{24}$$

la prima delle quali, tenuto conto della seconda, può scriversi

$$\frac{h_1}{(h_3-h_2)^2}-\frac{h_2}{(h_1-h_3)^2}+\frac{h_3}{(h_2-h_1)^2}=0\,. \tag{25}$$

Assumiamo come unità di lunghezza la distanza $(m_1\, m_2)$ ponendo

$$h_2-h_1=1 \quad , \quad h_3-h_2=h \quad , \quad h_3-h_1=h+1 \tag{26}$$

La (24) dà allora

$$h_1=-\frac{m_2+m_3\,(h+1)}{m_1+m_2+m_3}$$

Ricavando quindi dalle (26) h_2, h_3 in funzione di h e sostituendole nella (25), questa sbarazzata dai denominatori si riduce alla nota forma

$$(m_2+m_3)+h\,(2\,m_2+3\,m_3)+h^2\,(m_2+3\,m_3)-$$
$$-\,h^3(m_2+3\,m_1)-h^4\,(2m_2+3\,m_1)\,h^5\,(m_2+m_1)=0\,.$$

Parassitologia. — *Ricerche preliminari dirette a precisare la causa del gozzo e del cretinismo endemici.* Seconda Nota preliminare del Socio B. Grassi e del dott. L. Munaron.

Fisiologia. — *L'immunità acquisita contro i veleni, può essere trasmessa dai genitori alla prole? (Contributo alle conoscenze sulla trasmissione di caratteri acquisiti. Ricerche sperimentali).* Nota del Corrispondente A. Lustig.

Matematica. — *Sur la multiplication de deux séries de factorielles.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.