ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Il dott. Pellini ha intrapreso nel mio Istituto delle estese ricerche di indole chimica sopra i fanghi e le acque di Abano ricercando l'uranio e il radio. Egli ha potuto constatare la forte attività del precipitato baritico che si ottiene quando alla soluzione cloridrica del fango si aggiunge del cloruro di bario: si ha invece una sostanza molto meno radioattiva precipitando con acido solforico la soluzione cloridrica stessa. Elettrolizzando questa soluzione non si sono avuti pel catodo metallico resultati molto decisivi; ma altre esperienze sono in corso. Secondo le ricerche del Pellini, si mostrerebbero più attivi i fanghi di Abano che quelli di Battaglia, come ha trovato il prof. Vicentini. Le esperienze sulla radioattività sono state eseguite sia col metodo fotografico, che con quello elettroscopico.

Il dott. Anderlini ha cominciato a studiare i materiali dei soffioni di Larderello. Ha intanto esaminato i detriti della trivellazione che si pratica nella roccia per ottenere artificialmente i soffioni, ed il fango dei lagoni. Ha ottenuto col metodo elettroscopico resultati che mostrano essere l'uno e l'altro prodotto assai radioattivo. Inoltre ha esaminato il solfato baritico proveniente da una roccia del Vesuvio, in cui era stato trovato elio e bario. Questo solfato si mostra notevolmente radioattivo, resultato questo che mi sembra di un certo interesse. Le esperienze del dott. Anderlini sul residuo delle acque delle Fonti del Clitunno mostrerebbero in esso un'attività, ma assai leggera.

Spero presto di poter comunicare altre notizie sulle esperienze che si stanno facendo nel mio Istituto, specialmente su quelle che riguardano l'emanazione radioattiva.

Matematica. — *Sulle coppie di superficie applicabili nello spazio ellittico.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio U. Dini [1].

In una mia Memoria [2] ho dimostrato che le immagini di Clifford di una superficie, ottenute tirando da un punto P le parallele destrorse e sinistrorse alle sue normali e segando col piano polare si corrispondono in modo equivalente e che viceversa ogni tale corrispondenza equivalente di un piano ellittico in sè determina una congruenza normale. Di più ho dimostrato che superficie applicabili determinano sulle loro immagini di Clifford una corrispondenza equivalente. Scopo di questa nota è il cercare un'applicazione di questi fatti al problema [3] dell'applicabilità nello spazio ellittico.

Siano $E du^2 + G dv^2$, $D du^2 + D'' dv^2$ le due forme fondamentali di una superficie S riferita alle sue linee di curvatura, e siano X_i, Y_i, Z_i i para-

[1] Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

[2] *Il parallelismo di Clifford*; Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa 1900. Il prof. Bianchi mi comunica essere stato il seguente teorema già osservato da Study.

[3] Cfr. Bianchi, *Sopra le rappresentazioni equivalenti* ecc. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, fasc. 1°, 1° sem. 1904.

metri di scorrimento destrorsi del triedro principale, $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$ i sinistrorsi. Avremo (cfr. pag. 42 della mia Mem. cit.)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &dX_i = \sum_k (p_{ik}X_k du + q_{ik} X_k dv) \qquad (i, k = 1, 2, 3)\\ &\text{dove:}\\ &p_{ik} + p_{ki} = p_{ii} = 0 \ ; \ p_{12} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \ ; \ p_{13} = +\frac{D}{\sqrt{E}} \ ; \ p_{23} =\\ &= \pm\sqrt{E} \ ; \ q_{12} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \ ; \ q_{13} = \mp\sqrt{G} \ ; \ q_{23} = \frac{D''}{\sqrt{G}}\end{aligned}\right.$$

e le analoghe per Y_i, Z_i; in queste valgano i segni superiori; gli inferiori valgano per le $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$. Costruiamo le equazioni seguenti:

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial u} &= -(\lambda X_1 + \mu X_2) z_2 - (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_3 - (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_4\\ \frac{\partial z_2}{\partial u} &= \ (\lambda X_1 + \mu X_2) z_1 + (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_4 - (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_3\\ \frac{\partial z_3}{\partial u} &= -(\lambda X_1 + \mu X_2) z_4 + (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_1 + (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_2\\ \frac{\partial z_4}{\partial u} &= \ (\lambda X_1 + \mu X_2) z_3 - (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_2 + (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_1\end{aligned}\right.$$

e la equazioni (A′) che se ne deducono mutando $\frac{\partial}{\partial u}, \lambda, \mu$ in $\frac{\partial}{\partial v}, \lambda_1, \mu_1$, essendo $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ quattro funzioni da determinarsi. Dalle (A), (A′) si ha:

$$\Sigma z_i \frac{\partial z_i}{\partial u} = \Sigma z_i \frac{\partial z_i}{\partial v} = 0 \quad \text{ossia} \quad \Sigma z_i^2 = \text{cost.}$$

Dividendo le z_i per uno stesso fattore, esse saranno le coordinate di un punto mobile descrivente una certa superficie Σ_A. Scriviamo le condizioni per la completa integrabilità delle (A), (A′) [1]. Uguagliando nei due valori che se ne deducono per $\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v}$ i coefficienti di z_2 e rotando, troviamo:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda_1}{\partial u} - \frac{\partial\lambda}{\partial v} + \frac{\mu_1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\mu}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0\\ &\frac{\partial\mu_1}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\lambda}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0\end{aligned}\right.$$

$$(3_A)\quad \lambda_1\frac{D}{\sqrt{E}} - \mu\frac{D''}{\sqrt{G}} + \mu_1\sqrt{E} + \lambda\sqrt{G} + 2(\lambda_1\mu - \lambda\mu_1) = 0$$

[1] Le A, A′ se sono integrabili, sono completamente integrabili, poichè con uno scorrimento conveniente a Σ_A si può portarne un punto in una posizione qualunque, pur continuando le (A), (A′) a essere verificate.

Se nelle (A), (A′) alle X_i ecc., sostituiamo le $\overline{X}_i$ ecc., otterremo due nuovi sistemi di equazioni $(\overline{A})$, $(\overline{A}')$ definenti una nuova superficie $\overline{\Sigma}_A$. Le condizioni di integrabilità sono le (2) e la:

$$(3_{\overline{A}})\qquad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} - \mu_1 \sqrt{E} - \lambda \sqrt{G} + 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0$$

Se alle (A), (A′) sostituiamo il sistema:

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = -Xz_2 - Yz_3 - Zz_4\,; & \dfrac{\partial z_2}{\partial u} = Xz_1 - Yz_4 + Zz_3 \\[2ex] \dfrac{\partial z_3}{\partial u} = Yz_1 - Zz_2 + Xz_4\,; & \dfrac{\partial z_4}{\partial u} = Zz_1 + Yz_2 - Xz_3 \end{cases}$$

(dove per brevità si è posto $X = \lambda X_1 + \mu X_2$ e le analoghe rotando) e il sistema (C′) che se ne deduce ponendo $\dfrac{\partial z_i}{\partial v}$, λ_1, μ_1 al posto di $\dfrac{\partial z_i}{\partial u}$, λ, μ troviamo per condizione d'integrabilità le (2) e la

$$(3_C)\qquad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} + \mu_1 \sqrt{E} + \lambda \sqrt{G} - 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0\,.$$

Se queste equazioni sono soddisfatte, le z_i definite dalle (C), (C′) descrivono una superficie, che chiameremo Σ_C. Infine se nelle (C), (C′) alle X_i, Y_i, Z_i sostituiamo le $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$, le condizioni di integrabilità si riducono alle stesse (2) e alla:

$$(3_{\overline{C}})\qquad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} - \mu_1 \sqrt{E} - \lambda \sqrt{G} - 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0$$

Se queste equazioni sono soddisfatte, il punto z_i descrive una nuova superficie $\overline{\Sigma}_C$. Esaminiamo ora le equazioni (A), (A′) ecc. definenti una qualsiasi delle superficie Σ; o direttamente, oppure ricordando le equazioni a pag. 8 della mia Memoria citata, si trova che i parametri di scorrimento della normale a Σ_A $(\overline{\Sigma}_A)$ nel verso destrorso sono X_3, Y_3, Z_3 $(\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3)$, quelli della normale a Σ_C (a $\overline{\Sigma}_C$) nel verso sinistrorso sono pure X_3, Y_3, Z_3, $(\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3)$. Ciascuna delle superficie Σ ha perciò una delle sue due immagini piane di Clifford coincidente con una delle immagini piane della S.

Il quadrato dell'elemento lineare delle quattro superficie Σ è sempre:

$$(4)\qquad (\lambda^2 + \mu^2)\,du^2 + 2(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\,du\,dv + (\lambda_1^2 + \mu_1^2)\,dv^2$$

Ricordiamo però che le λ, μ, λ_1, μ_1 non saranno uguali per le quattro superficie. Esse anzi devono in ciascun caso soddisfare a equazioni distinte, che possono anzi essere incompatibili: ciò avviene per la (3_A) e la (3_C) (la $(\bar{3}_A)$ e la $(\bar{3}_C)$) che danno $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu = 0$, cosicchè l'elemento lineare delle superficie corrispondenti sarebbe degenere. Sia ora y_i un punto descrivente una superficie, η_i i coseni di direzione della corrispondente normale [1]. È allora

$$-\Sigma[y, dy]\, d[y, \eta] = -\Sigma[y, dy][dy, \eta] - \Sigma[y, dy][y, d\eta] = -\Sigma\, dy\, d\eta$$

In altre parole $-\Sigma[y, dy]\, d[y, \eta]$ è la seconda forma fondamentale della superficie. Se ora $A du^2 + 2B du dv + C dv^2$ è il quadrato dell'elemento lineare, essa diventa:

$$-\Sigma\left\{\sqrt{A}\left[y, \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial y}{\partial u}\right] du + \sqrt{C}\left[y, \frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\partial y}{\partial v}\right]\right\} d[x, \xi]$$

o in altre parole se X_i, Y_i, Z_i sono i parametri, in un verso qualunque, della normale e delle tangenti alle $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ (anche se $B \neq 0$) la seconda forma fondamentale della superficie è:

$$-\Sigma\left[\sqrt{A}\, dX_1 + \sqrt{C}\, dX_2\right] dX_3$$

Questa semplice formula permette tosto di trovare le seconde forme fondamentali delle nostre superficie. E si trova che esse sono

$$\left(\lambda \frac{D}{\sqrt{E}} \pm \mu\sqrt{E}\right) du^2 + \left(\mu_1 \frac{D''}{\sqrt{G}} \mp \lambda_1\sqrt{G}\right) dv^2 + \left(\mu \frac{D''}{\sqrt{G}} + \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} \pm \mu_1\sqrt{E} \mp \lambda\sqrt{G}\right) du\, dv \tag{5}$$

dove i segni superiori valgono per Σ_A, Σ_C, gli inferiori per $\bar{\Sigma}_A, \bar{\Sigma}_C$.

Possono ora la $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ soddisfare contemporaneamente oltre che alle (2) anche a due delle (3)? Abbiamo già visto essere inutile combinare le (3_A) con le (3_C), le $(\bar{3}_A$ con le $\bar{3}_C)$. Combinando la (3_A) con la $(\bar{3}_A)$ o o con la $(3_{\bar{C}})$ otteniamo rispettivamente

$$(A\bar{A}) \quad \mu_1\sqrt{E} + \lambda\sqrt{G} = 0 \;;\; \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} \pm 2(\lambda_1\mu - \lambda\mu_1) = 0$$

$$(A\bar{C}) \quad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} = \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} \;;\; \mu_1\sqrt{E} + \lambda\sqrt{G} \pm 2(\lambda_1\mu - \lambda\mu_1) = 0$$

(1) Cfr. mia Mem. citata pag. 9 e seg. Io indico se y_i, z_i sono due quaterne di variabili ($i = 1, 2, 3, 4$) con $[yz]_1, [yz]_2, [yz]_3$ le $(z_2y_1 - z_1y_2) + (z_4y_3 - z_3y_4)$; $(z_2y_4 - z_4y_2) + (z_3y_1 - z_1y_3)$; $(z_3y_2 - z_2y_3) + (z_4y_1 - z_1y_4)$.

dove valgono i segni superiori; gli inferiori valgono per le $(C\overline{C})$ e $(C\overline{A})$ che si otterrebbero combinando (3_C) con $(\overline{3}_C)$ o con $(\overline{3}_A)$. *Se le* $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ *oltre che alle* (2) *soddisfanno alle* $(A\overline{A})$, [o alle $(A\overline{C})$] ecc., le *corrispondenti* $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_A, [\Sigma_A, \overline{\Sigma}_C]$ ecc. *sono applicabili. E perciò integrando i precedenti sistemi di equazioni, si deducono da ogni superficie* S *infinite coppie di superficie* Σ *applicabili, aventi le normali parallele in un certo verso alle normali di* S. L'ipotesi qui fatta che due tangenti corrispondenti sulle Σ siano parallele a una stessa tangente di S non è restrittiva e sarà giustificata più sotto.

Perverremo a una notevole applicazione delle precedenti formule, chiedendoci: È possibile che sulle $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_A$ le tangenti alle $u = \text{cost.}$ e alle $v = \text{cost.}$ abbiano gli stessi parametri destrorsi e sinistrorsi che le corrispondenti tangenti di S, ossia che $\mu = \lambda_1 = 0$? In tal caso le $(A\overline{A})$ darebbero $\lambda\mu_1 = \mu\lambda_1$ caso che sappiamo da escludersi. Nel secondo dalle (2) e dalle $(A\overline{C})$ si ha:

$$\mu_1 \sqrt{E} + \lambda \sqrt{G} - 2\lambda\mu_1 = 0 \; ; \; \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\mu_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \; ; \; \frac{\partial \mu_1}{\partial u} = \frac{\lambda}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} .$$

Si può porre perciò $\lambda = \frac{\sqrt{E}}{\xi}, \mu_1 = \frac{\sqrt{G}}{2 - \xi}$ dove ξ è una nuova incognita ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 2$). È poi $\xi \neq 1$ perchè altrimenti le (5) dimostrerebbero identiche le $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_C$; e noi chiaramente trascuriamo questo caso ovvio banale. Le equazioni precedenti divengono così:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\log \sqrt{E} - \frac{1}{2} \log \frac{\xi^2}{\xi - 1}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\log \sqrt{G} - \frac{1}{2} \log \frac{(\xi - 2)^2}{\xi - 1}\right] = 0 .$$

È mutando i parametri dalle u, v si trova potersi porre:

$$E = \frac{\xi^2}{\xi - 1} \qquad G = \frac{\xi^2}{\xi - 1} - 4 \tag{6}$$

Perciò è

$$E - G = 4 . \tag{I}$$

Notiamo che il nostro calcolo è lecito perchè il mutare p. es. il parametro delle u moltiplica per uno stesso fattore $\lambda, \mu_1; \sqrt{E}$; quindi ξ non muta. Per le (6) le forme fondamentali delle $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_C$ diventano così:

$$ds^2 = \frac{1}{\xi - 1}(du^2 + dv^2) \tag{7}$$

$$\frac{D}{\xi} du^2 + \frac{D''}{2 - \xi} dv^2 \pm 2\, du\, dv . \tag{8}$$

Le due superficie in discorso hanno perciò uguale in punti corrispondenti la curvatura media e perciò anche (essendo applicabili), i raggi di curvatura. Esse sono una coppia di superficie di Bonnet nello spazio ellittico [1].

Viceversa, prese due superficie Σ_A, $\bar{\Sigma}_C$ applicabili con conservazione dei raggi di curvatura, si prendano a linee coordinate u, v quelle tali che le loro seconde forme fondamentali non differiscano che per il segno del coefficiente di $du\,dv$; l'ipotesi fatta dimostra tosto che le linee in discorso sono ortogonali; le equazioni di Codazzi dicono subito che il coefficiente di $du\,dv$ è costante, p. es. uguale a ± 1 e che le linee in discorso formano un sistema isotermo. Scritte le forme fondamentali sotto la forma (6), (7) si ricavano tosto i valori di ξ, D, D″ e per le (6) anche di E, G; si trova così una superficie S riferita alle linee di curvatura per cui è soddisfatta la (I) (perchè le equazioni di Codazzi e di Gauss relative si trovano tosto soddisfatte). E questa superficie si può costruire per quadrature, essendone note le immagini piane di Clifford (loc. cit. § 20) che coincidono con immagini delle superficie date.

Noi potremo chiamare queste superficie per cui è soddisfatta (I) (quando ci si riferisce alle linee di curvatura) superficie pseudoisoterme. E diremo allora:

Il problema di costruire le superficie pseudoisoterme dello spazio ellittico e quello di costruire le coppie di Bonnet (coppie di superficie applicabili con conservazione dei raggi di curvatura) nello stesso spazio, sono problemi equivalenti.

Alle superficie pseudoisoterme appartiene una classe notevole di superficie, quelle cioè per cui la somma dei raggi ridotti ϱ_1, ϱ_2 di curvatura è uguale a 2 e a ognuna di esse corrisponde quindi una coppia di superficie di Bonnet. Infatti ponendo, in tal caso, $\lambda = \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2}$, $\mu_1 = \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1}$ le (2), (3) risultano soddisfatte in causa dall'ipotesi fatta e delle equazioni di Codazzi.

A due superficie applicabili $\bar{\Sigma}_A$, Σ_A tali che l'angolo destrorso delle loro normali è costante, corrisponde evidentemente una superficie S tale che le parallele alle sue normali tirate da un punto fisso P formano un angolo costante e viceversa. La superficie S non sarebbe che un'evolvente di una sfera col centro P.

In generale si può dire che la ricerca delle *coppie di superficie applicabili con una proprietà prefissa qualsiasi è ricondotta alla ricerca di una superficie dotata di una qualche speciale proprietà.*

[1] Cfr. Bianchi, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, fasc. 11°, 2° sem. 1903.

Studiamo ora il problema inverso e siano T, U due superficie applicabili qualunque: in qual modo si potrebbero esse dedurre nel modo testè studiato da una superficie S dello spazio stesso? Distinguiamo varii casi: Nel caso α (δ) le immagini di S coincidano con le destrorse (sinistrorse) di T, U. Nel caso β (γ) lè normali a S siano parallele rispettivamente nel verso destrorso e sinistrorso (sinistrorso e destrorso) alle corrispondenti di T, U.

Siano X_i, Y_i, Z_i i parametri della tangente alla $v = \text{cost.}$, $(i = 1)$, della normale $(i = 3)$ e della tangente perpendicolare a queste due rette $(i = 2)$ di T; e siano $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$ le quantità analoghe per U. Nel caso (α) (δ) siano questi parametri destrorsi (sinistrorsi); nel caso β (γ) siano destrorsi (sinistrorsi) quelli calcolati per T e siano sinistrorsi (destrorsi) quelli di U. Siano $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ l'elemento lineare, $D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2$, $\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''dv^2$ le seconde forme fondamentali delle due superficie T, U; supponiamo che le $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, siano assintotiche sulla superficie S da determinarsi. I parametri di una normale a S sono $X_3, Y_3, Z_3, \overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$. Per distinguere la superficie S dalle superficie parallele, che hanno le stesse normali, osserviamo che l'angolo delle due parallele a una retta r tirate da un punto P non dipende che dalla distanza da P a r. Cosicchè se S, S' sono due superficie parallele e da un punto di S' tiro le due parallele a una tangente di S nel punto corrispondente, l'angolo di queste due rette non varia, mutando il punto e la tangente considerata. Osserviamo ora le tangenti di S, che hanno per parametri destrorsi X_1, Y_1, Z_1 e X_2, Y_2, Z_2. I parametri sinistrorsi saranno $\overline{\overline{X}}_1 = \cos\varphi\,\overline{X}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\overline{X}_2$ ecc. e $\overline{\overline{X}}_2 = -\operatorname{sen}\varphi\,\overline{X}_1 + \cos\varphi\,\overline{X}_2$ ecc., dove φ è un angolo qualunque, che io dico costante. Infatti il vertice del triedro, i parametri dei cui spigoli sono $(X_i, Y_i, Z_i, \overline{\overline{X}}_i, \overline{\overline{Y}}_i, \overline{\overline{Z}}_i)$ (si è posto $\overline{\overline{X}}_3 = \overline{X}_3$ ecc.) genera una superficie S di cui $(X_3, Y_3, Z_3, \overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3)$ è la normale soltanto se:

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \Sigma \overline{\overline{X}}_2 \frac{\partial \overline{\overline{X}}_1}{\partial u} \quad ; \quad \Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \Sigma \overline{\overline{X}}_2 \frac{\partial \overline{\overline{X}}_1}{\partial v} .$$

Ma essendo T, U applicabili è

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \Sigma \overline{X}_2 \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial u} \; ; \; \Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \Sigma \overline{X} \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial v} .$$

Le precedenti equazioni divengono perciò $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, $\varphi = \text{cost.}$ Questo angolo varia perciò soltanto di una costante additiva, passando dalla superficie S a una delle parallele; e quindi, per l'osservazione precedente, noi potremo scegliere tra queste superficie la S proprio in modo che $\varphi = 0$. Quale è ora la condizione, affinchè le linee coordinate siano proprio le assintotiche di S? Si verifica tosto che ciò avviene soltanto se:

$$
(9)\quad \begin{cases} \Sigma\, X_1 \dfrac{\partial X_3}{\partial u} : \Sigma\, X_2 \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \Sigma\, \overline{X}_1 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} : \Sigma\, \overline{X}_2 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} \\[2ex] \Sigma\, X_1 \dfrac{\partial X_3}{\partial v} : \Sigma\, X_2 \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \Sigma\, \overline{X}_1 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} : \Sigma\, \overline{X}_2 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} \end{cases}
$$

Sia ora una superficie qualunque, riferita a un arbitrario sistema di linee coordinate; siano $E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$, $D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2$ le sue forme fondamentali; siano $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i$ i parametri di scorrimento del solito triedro formato dalla tangente alla $v = \text{cost.}$, dalla normale e dalla tangente perpendicolare a queste due rette. Avremo (cfr. la mia Mem. cit. pag. 42 dove le seguenti formole sono date nel caso di $F = 0$):

$$
(10)\quad \begin{cases} d\xi_3 = -\left\{ \dfrac{D}{\sqrt{E}}\,\xi_1 + \left(\dfrac{FD - ED'}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \sqrt{E} \right) \xi_2 \right\} du + \\[2ex] + \left\{ \pm \left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} - \dfrac{D'}{\sqrt{E}} \right) \xi_1 + \left(\dfrac{FD' - ED''}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) \xi_2 \right\} dv \end{cases}
$$

dove valgano i segni superiori; gli inferiori valgano per le formule che se ne deducono, mutando le ξ nelle $\overline{\xi}$.

Queste equazioni divengono nel caso (α):

$$
(10_\alpha)\quad \begin{cases} dX_3 = \left\{ -\dfrac{D}{\sqrt{E}}\,X_1 + \left(\dfrac{FD - ED'}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \sqrt{E} \right) X_2 \right\} du + \\[2ex] + \left\{ \left(\pm \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} - \dfrac{D'}{\sqrt{E}} \right) X_1 + \left(\dfrac{FD' - ED''}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) X_2 \right\} dv \\[2ex] d\overline{X}_3 = \left\{ -\dfrac{\overline{D}}{\sqrt{E}}\,\overline{X}_1 + \left(\dfrac{F\overline{D} - E\overline{D}'}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \pm \sqrt{E} \right) \overline{X}_2 \right\} du + \\[2ex] + \left\{ \left(\pm \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} - \dfrac{\overline{D}}{\sqrt{E}} \right) \overline{X}_1 + \left(\dfrac{F\overline{D}' - E\overline{D}''}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \pm \dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) \overline{X}_2 \right\} dv \end{cases}
$$

dove valgono i segni superiori. Nel caso (δ) valgono equazioni analoghe (10_δ) prendendo i segni inferiori. Le equazioni (10_β) relative al caso β [(10_γ) relative al caso γ] si ottengono prendendo nella prima [seconda] i segni superiori, nella seconda [prima] i segni inferiori. Dalle formule precedenti si deduce tosto che con convenzioni analoghe le (9) diventano:

$$
(9_\alpha)\quad D : D' \pm \sqrt{EG - F^2} = \overline{D} : \overline{D}' \pm \sqrt{EG - F^2}\,;\; D' \mp \sqrt{EG - F^2} : D'' = \\ = \overline{D}' \mp \sqrt{EG - F^2} : \overline{D}''
$$

In tutti i quattro casi si deduce:

$$D'^2 - (EG - F^2) = \overline{D}'^2 - (EG - F^2) \quad \text{ossia} \quad D'^2 = \overline{D}'^2 \quad \text{ossia} \quad D' = \pm \overline{D}'$$

Cambiando eventualmente i segni della seconda forma fondamentale di una, o di ambedue le superficie T, U si vede che possiamo limitare lo studio al caso (α), che include in sè tutti gli altri.

E troviamo interpretando geometricamente le (9_α) (loc. cit., pag. 40):

A ogni coppia di superficie applicabili T, U *corrisponde sempre una superficie* S, *da cui essa si può dedurre coi nostri metodi.*

Le linee coordinate delle superficie applicabili T, U *corrispondenti alle assintotiche di* S *godono delle seguenti due proprietà* (che nello spazio euclideo spettano al sistema coniugato comune): *In punti corrispondenti di* T, U *sono uguali gli angoli formati dalle immagini piane delle linee suddette e sono pure uguali i prodotti delle loro curvature normali.*

Fisica matematica. — *Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica.* Nota II [1] di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

§ 2. È noto che quando un dielettrico omogeneo si introduce in un campo dato, si provoca sulla superficie del dielettrico una carica fittizia di cui è assegnabile il potenziale [2]. Indicando con ε_0 ed ε_1 le costanti dielettriche del vuoto e del coibente omogeneo adoperato, con $\mathfrak{Z}$ la componente secondo ζ della forza elettrica del campo prodottosi dopo l'introduzione del dielettrico, e relativa a punti interni allo strato, il potenziale della carica prodottasi sulla superficie dello strato dalla parte delle ζ positive, che indichiamo per il momento con σ_1 è

$$\chi = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{\sigma_1}\frac{\mathfrak{Z}\,d\sigma}{r_1},$$

indicando r_1 le distanze da σ_1. Il potenziale della carica uguale ma di segno contrario prodottasi sulla faccia inferiore dello strato, che indichiamo con σ_2, è

$$\chi' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_{\sigma_2}\frac{\mathfrak{Z}\,d\sigma}{r_2},$$

(1) V. pag. 181.

(2) Vedi per es.: *Das elektromagnetische Feld: Vorlesungen* von Emil Cohn, pag. 99. Leipzig, 1900.