ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

In tutti i quattro casi si deduce:

$$D'^2 - (EG - F^2) = \overline{D}'^2 - (EG - F^2) \quad \text{ossia} \quad D'^2 = \overline{D}'^2 \quad \text{ossia} \quad D' = \pm \overline{D}'$$

Cambiando eventualmente i segni della seconda forma fondamentale di una, o di ambedue le superficie T, U si vede che possiamo limitare lo studio al caso (α), che include in sè tutti gli altri.

E troviamo interpretando geometricamente le (9_α) (loc. cit., pag. 40):

A ogni coppia di superficie applicabili T, U *corrisponde sempre una superficie* S, *da cui essa si può dedurre coi nostri metodi.*

Le linee coordinate delle superficie applicabili T, U *corrispondenti alle assintotiche di* S *godono delle seguenti due proprietà* (che nello spazio euclideo spettano al sistema coniugato comune): *In punti corrispondenti di* T, U *sono uguali gli angoli formati dalle immagini piane delle linee suddette e sono pure uguali i prodotti delle loro curvature normali.*

Fisica matematica. — *Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica.* Nota II [1] di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

§ 2. È noto che quando un dielettrico omogeneo si introduce in un campo dato, si provoca sulla superficie del dielettrico una carica fittizia di cui è assegnabile il potenziale [2]. Indicando con ε_0 ed ε_1 le costanti dielettriche del vuoto e del coibente omogeneo adoperato, con $\mathfrak{Z}$ la componente secondo ζ della forza elettrica del campo prodottosi dopo l'introduzione del dielettrico, e relativa a punti interni allo strato, il potenziale della carica prodottasi sulla superficie dello strato dalla parte delle ζ positive, che indichiamo per il momento con σ_1 è

$$\chi = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{\sigma_1} \frac{\mathfrak{Z}\, d\sigma}{r_1},$$

indicando r_1 le distanze da σ_1. Il potenziale della carica uguale ma di segno contrario prodottasi sulla faccia inferiore dello strato, che indichiamo con σ_2, è

$$\chi' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{4\pi\,\varepsilon_0} \int_{\sigma_2} \frac{\mathfrak{Z}\, d\sigma}{r_2},$$

(1) V. pag. 181.

(2) Vedi per es.: *Das elektromagnetische Feld: Vorlesungen* von Emil Cohn, pag. 99. Leipzig, 1900.

essendo r_2 le distanze da σ_2: perciò il potenziale resultante sarà

$$\chi + \chi' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_\sigma \mathfrak{Z}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) d\sigma .$$

Se si indica con δ lo spessore uniforme ed assai piccolo dello strato dielettrico disteso sul piano σ, l'espressione del potenziale di doppio strato corrispondente alla polarizzazione del dielettrico viene ad essere

$$(11) \qquad \psi = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\delta}{4\pi\varepsilon_0}\int_\sigma \mathfrak{Z}\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\, d\sigma ,$$

essendo r le distanze dai punti di σ, e perciò il momento μ di esso ha l'espressione

$$(12) \qquad \mu = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\delta}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathfrak{Z} = -\frac{l}{2\pi}\,\mathfrak{Z} ,$$

avendo posto $l = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\delta}{2\varepsilon_0}$.

Ma dalle (2) si ha

$$\mathfrak{Z} = -\frac{d}{d\zeta}(\mathrm{F}' + \mathrm{F}_1) = -\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\Delta} + \mathrm{F}_2 + \psi\right) = -\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\Delta} + \mathrm{F}_2\right),$$

quindi tenendo conto delle (12) ed (8) si ha

$$(13) \qquad \psi_- = -2\pi\mu = l\,\mathfrak{Z} = -l\left\{\frac{d\mathrm{F}_2}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\Delta}\right)\right\},$$

che è la condizione caratteristica della ψ relativa al piano σ. Altre due condizioni caratteristiche relative al piano σ si ottengono ricordando che per la legge di Ohm la corrente, che in esso si produce, è proporzionale alla componente tangenziale della forza elettrica, ed ha la stessa direzione. Indicando quindi con $\varkappa$ una costante di cui è noto il significato fisico [1], e con u_1 e v_1 le componenti della corrente indotta in σ, e distinguendo inoltre i valori delle funzioni sul piano σ, cioè dalla parte inferiore dello strato dielettrico, col segno —, avremo

$$\mathrm{X}_- = \mathrm{A}\varkappa u_1 \;,\; \mathrm{Y}_- = \mathrm{A}\varkappa v_1 .$$

Per le (2) e per le proprietà caratteristiche delle $\mathrm{U}_2, \mathrm{V}_2, \psi$ avremo quindi:

$$\varkappa\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{d\mathrm{U}_2}{d|\zeta|}\right] = -\frac{d}{d\xi}(\mathrm{F}' + \mathrm{F}_2 + \psi_-) + a\frac{d}{d\xi}(\mathrm{U}' + \mathrm{U}_2 + a\psi_-) ,$$

$$\varkappa\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{d\mathrm{V}_2}{d|\zeta|}\right] = -\frac{d}{d\eta}(\mathrm{F}' + \mathrm{F}_2 + \psi_-) + a\frac{d\mathrm{V}_2}{d\xi} ,$$

[1] Levi-Civita, Mem. cit. pag. 25.

ossia per la (1) si ottiene

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dU_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dU_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\xi}-(1-a^2)\dfrac{d\psi_-}{d\xi}=m(1-a^2)\dfrac{d\dfrac{1}{\varDelta}}{d\xi}, \\ \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dV_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dV_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\eta}-\dfrac{d\psi_-}{d\eta}=m\dfrac{d\dfrac{1}{\varDelta}}{d\eta}. \end{cases}$$

In definitiva le quattro incognite F_2, U_2, V_2, ψ, oltre alle equazioni indefinite (9) e (10) debbono soddisfare alle condizioni ai limiti (13) e (14).

Derivando la (13) rispetto a ξ ed η, e sostituendo i valori di $\dfrac{d\psi_-}{d\xi}, \dfrac{d\psi_-}{d\eta}$ nella (14), si ricavano queste altre equazioni valevoli per i punti di σ:

$$(14)'\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dU_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dU_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\xi}+l(1-a^2)\dfrac{d^2F_2}{d\xi\, d|\zeta|}=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{1}{\varDelta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\varDelta}}{d|\zeta|}\right], \\ \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dV_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dV_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\eta}+l\dfrac{d^2F_2}{d\eta\, d|\zeta|}=m\dfrac{d}{d\eta}\left[\dfrac{1}{\varDelta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\varDelta}}{d|\zeta|}\right]. \end{cases}$$

Da esse si deducono due altre valevoli in tutto lo spazio: per questo basta osservare che per le proprietà specifiche di $F_2\, U_2\, V_2$ i primi membri delle (14)′ sono funzioni regolari di $\xi\,\eta\,|\zeta|$ per $|\zeta|>0$, verificanti la $\Box f=0$, e riducentisi per $\zeta=0$ a $m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{1}{\varDelta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\varDelta}}{d|\zeta|}\right]$, $m\dfrac{d}{d\eta}\left[\dfrac{1}{\varDelta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\varDelta}}{d|\zeta|}\right]$; lo stesso avviene dei secondi membri, purchè in essi si muti ζ in $-|\zeta|$, con che si toglie la singolarità che presentano nel punto m.

Ma due funzioni aventi le proprietà accennate coincidono; ponendo quindi

$$(15)\qquad V^2=\xi^2+(1-a^2)\left[\eta^2+(|\zeta|+d)^2\right],$$

si ha dalle (14)′ le equazioni

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dU_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dU_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\xi}+l(1-a^2)\dfrac{d^2F_2}{d\xi\, d|\zeta|}=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{1}{V}-l\dfrac{d\dfrac{1}{V}}{d|\zeta|}\right], \\ \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dV_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dV_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\eta}+l\dfrac{d^2F_2}{d\eta\, d|\zeta|}=m\dfrac{d}{d\eta}\left[\dfrac{1}{V}-l\dfrac{d\dfrac{1}{V}}{d|\zeta|}\right], \end{cases}$$

verificate in tutto lo spazio.

Si vede quindi come il problema è ridotto all' integrazione del sistema di equazioni

$$(17)\qquad \square F_2 = 0\ ,\ \square U_2 = 0\ ,\ \square V_2 = 0\ ,\ a\frac{dF_2}{d\xi} = \frac{dU_2}{d\xi} + \frac{dV_2}{d\eta}$$

e delle (16); quanto alla ψ dovendo soddisfare alla $\square\, \psi = 0$, alle solite condizioni di regolarità, ed assumere nei punti simmetrici rispetto a σ valori uguali e di segno contrario, non può essere altro che

$$(18)\qquad \psi = l\left\{\frac{dF_2}{d\zeta} + m\frac{d\frac{1}{V}}{d\zeta}\right\},$$

la quale possiede appunto tutti i requisiti richiesti.

Derivando la prima delle (16) rispetto a ξ e la seconda rispetto a η, sommando e tenendo conto delle (17), si ha per F_2

$$\frac{a\varkappa}{2\pi}\frac{d^2F_2}{d\xi\, d|\zeta|} + \frac{d^2F_2}{d|\zeta|^2} - l\frac{d^3F_2}{d|\zeta|^3} = -m\frac{d^2}{d|\zeta|^2}\left[\frac{1}{V} - l\frac{d\frac{1}{V}}{d|\zeta|}\right],$$

la quale integrata rispetto a $|\zeta|$ da un valore qualunque sino all' infinito, tenendo conto che i due membri si annullano all' infinito, dà l' altra

$$(19)\qquad \frac{a\varkappa}{2\pi}\frac{dF_2}{d\xi} + \frac{dF_2}{d|\zeta|} - l\frac{d^2F_2}{d|\zeta|^2} = -m\frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{1}{\varDelta} - l\frac{d\frac{1}{V}}{d|\zeta|}\right].$$

Quando si riuscisse a determinare la F_2, soddisfacente a tutte le condizioni del problema, sarebbe agevole determinare poi la U_2 e V_2 dalle (16) e (17), le quali sono rispetto ad U_2 e V_2 equazioni identiche a quelle che si hanno nel caso considerato dal prof. Levi-Civita [1].

§ 3. Dal punto di vista pratico è sufficiente passare dalle equazioni differenziali alle approssimazioni, senza premetterne l' integrazione rigorosa. A tale scopo si osservi che essendo a il rapporto della velocità di traslazione della carica m alla velocità della luce nell' etere, e $\varkappa$ un trentesimo della resistenza dell' unità di superficie del piano conduttore σ, espressa in Ohm, si possono riguardare a e $\varkappa$ come quantità piccolissime, praticamente dello stesso ordine di grandezza [2], e quindi considerare $h = \dfrac{2\pi a}{\varkappa}$ come

[1] Mem. cit. pag. 28.
[2] Levi-Civita, Mem. cit. pag. 37.

un parametro finito. Riguardando anche l come una quantità finita, per quanto piccola, prendiamo a considerare quell' integrali F_2, U_2, V_2 che si comportano regolarmente per valori di a piccolissimi, e che si possono quindi sviluppare secondo le potenze di a, per a assai piccolo.

Ponendo

$$
(20) \qquad \left\{
\begin{aligned}
F_2 &= f_0 + a f_1 + a^2 f_2 + \cdots, \\
U_2 &= u_0 + a u_1 + a^2 u_2 + \cdots, \\
V_2 &= v_0 + a v_1 + a^2 v_2 + \cdots; \\
\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) + \cdots
\end{aligned}
\right.
$$

essendo $r'^2 = \xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2$, sostituiamo queste espressioni nelle (19), (16), (17) in cui si è sostituito $a \dfrac{2\pi}{h}$ per $\varkappa$, ed eguagliamo i coefficienti delle stesse potenze di a. Otterremo delle equazioni da cui possiamo ricavare le f, v, u, le quali poi, come funzioni di $\xi\, \eta\, |\zeta|$, debbono possedere tutte le caratteristiche proprie di $F_2\, U_2\, V_2$.

Consideriamo il caso che della a si possano trascurare le potenze superiori alla prima; osservando che la (19) e (16) si debbono scrivere

$$
(19)' \qquad a^2 \frac{dF_2}{d\xi} + h \frac{dF_2}{d|\zeta|} - l\, h \frac{d^2 F_2}{d|\zeta|^2} = - m\, h \frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{1}{\Delta} - l \frac{d\frac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right],
$$

$$
(16)' \qquad \left\{
\begin{aligned}
& a \frac{dU_2}{d|\zeta|} + a h \frac{dU_2}{d\xi} = h \frac{dF_2}{d\xi} - l h (1 - a^2) \frac{d^2 F_2}{d\xi\, d|\zeta|} + m h (1 - a^2) \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\Delta} - l \frac{d\frac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right] \\
& a \frac{dV_2}{d|\zeta|} + a h \frac{dV_2}{d\xi} = h \frac{dF_2}{d\eta} - l\, h \frac{d^2 F_2}{d\eta\, d|\zeta|} + m\, h \frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{\Delta} - l \frac{d\frac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

si riconosce che per poter valutare i termini in a di U_2 e V_2 è necessario tener conto del termine in a^2 di F_2. Si ottiene intanto dalla (19)', sostituendo ad F_2 ed $\dfrac{1}{\Delta}$ i relativi sviluppi e tenendo conto sino dei termini in a^2, che deve essere

$$
\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_0 - l \frac{df_0}{d|\zeta|}\right] = - m \frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{1}{r'} - l \frac{d\frac{1}{r'}}{d|\zeta|}\right],
$$

$$
\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_1 - l \frac{df_1}{d|\zeta|}\right] = 0,
$$

$$
\frac{df_0}{d\xi} + h \frac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 - l \frac{df_2}{d|\zeta|}\right] = - \frac{m\, h}{2} \frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) - l \frac{d^2}{d\xi\, d|\zeta|}\left(\frac{\xi}{r'}\right)\right],
$$

mentre dalla (17) si ha

$$\Delta_2 f_0 = 0 \ , \ \Delta_2 f_1 = 0 \ , \ \Delta_2 f_2 = \frac{d^2 f_0}{d\xi^2}.$$

Si riconosce quindi che deve essere intanto

$$f_0 = -\frac{m}{r'} \ , \ f_1 = 0$$

restando a determinarsi f_2 dall' equazioni

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & h\frac{d}{d|\zeta|}\left\{ f_2 + \frac{m}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) - l\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 + \frac{m}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right)\right]\right\} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{r'}\right), \\ & \Delta_2 f_2 = -m\frac{d^2\frac{1}{r'}}{d\xi^2}. \end{aligned} \right.$$

Osservando che, per $a = 0$, cioè supponendo la carica fissa, devono essere nulli i potenziali U_2 e V_2 si deduce senz' altro che deve essere $u_0 = 0$, $v_0 = 0$. Dalle (16)′ e dalle (17) tenendo conto dei valori già determinati si ricavano inoltre le relazioni

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{du_1}{d|\zeta|} + h\frac{du_1}{d\xi} + h\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{r'}\right) = h\frac{d}{d\xi}\left\{ f_2 + \frac{m}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) - l\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 + \frac{m}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right)\right]\right\}, \\ & \frac{dv_1}{d|\zeta|} + h\frac{dv_1}{d\xi} = h\frac{d}{d\eta}\left\{ f_2 + \frac{m}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) - l\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 + \frac{m}{2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(23) \qquad \Delta_2 u_1 = 0 \ , \ \Delta_2 v_1 = 0 \ , \ \frac{du_1}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\eta} + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{r'}\right) = 0.$$

Derivando la prima delle (22) rispetto ad η e la seconda rispetto a ξ si trae

$$\frac{d^2 u_1}{d\eta\, d|\zeta|} + h\frac{d^2 u_1}{d\xi\, d\eta} + h\frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{m}{r'}\right) = \frac{d^2 v_1}{d\xi\, d|\zeta|} + h\frac{d^2 v_1}{d\xi^2},$$

e quindi, per le (23), si ottiene

$$\frac{d^2 u_1}{d\eta\, d|\zeta|} - h\frac{d^2 v_1}{d\eta^2} = \frac{d^2 v_1}{d\xi\, d|\zeta|} + h\frac{d^2 v_1}{d\xi^2},$$

ossia

$$\frac{d^2 u_1}{d\eta\, d|\zeta|} + h\frac{d^2 v_1}{d|\zeta|^2} - \frac{d^2 v_1}{d\xi\, d|\zeta|} = 0.$$

Questa integrata da un valore qualunque di $|\zeta|$ sino all' infinito, tenendo conto che i suoi termini all' infinito si annullano, dà l' altra

$$\frac{du_1}{\delta\eta} + h\frac{dv_1}{d|\zeta|} - \frac{dv_1}{d\xi} = 0,$$

la quale insieme alle (23) serve alla determinazione di u_1 e v_1. Ma a queste stesse equazioni e quindi alle stesse espressioni di u_1 e v_1 si giunge, coll'approssimazione considerata, anche nel caso in cui manca lo strato dielettrico sul piano conduttore σ (¹). Di più si ha, giacchè si trascurano i termini in a^2, che è $F_2 = -\frac{m}{r'}$, quindi per la (18) è $\psi = 0$. Le componenti delle forze elettromagnetiche date dalle (2), (3) vengono quindi identiche a quelle che si hanno quando manca lo strato coibente. Il che ci permette di conchiudere che la presenza di un sottile strato dielettrico sul piano conduttore, quando si riguardano trascurabili le potenze di a superiori alla prima, non porta alterazione nel campo generato dalla carica mobile. Relativamente alle componenti della forza magnetica si può riconoscere anche facilmente che lo strato dielettrico non porta in esse alterazione, ancorchè ci si limiti a trascurare solo le potenze di a superiori alla seconda; infatti si ricava in modo simile al precedente che negli sviluppi (20) deve essere $f_3 = 0$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$, quindi le componenti delle forze magnetiche date dalle (3) rimangono le stesse di prima.

Per considerare il caso in cui lo strato dielettrico è disteso sul piano conduttore dalla parte delle ζ negative, basta mutare l in $-l$ nelle precedenti equazioni; si giunge quindi ad un resultato identico.

Meccanica. — *Sul problema dell'equilibrio elastico di un cilindro circolare indefinito.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA (²).

1. Ricordiamo che, secondo le indicazioni date in una mia Memoria degli Annali di matematica (³), quando sulla superficie di un corpo elastico, isotropo, in equilibrio, sono date le componenti u, v, w degli spostamenti, in un punto interno al corpo, di coordinate x, y, z, supposta nota la dilatazione θ, le u, v, w sono date dalle formole:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma u \frac{dG}{dn}\, d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\theta \frac{dG}{dn}\, d\sigma\,, \\ v = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma v \frac{dG}{dn}\, d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} y\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \eta\theta \frac{dG}{dn}\, d\sigma\,, \\ w = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma w \frac{dG}{dn}\, d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} z\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \zeta\theta \frac{dG}{dn}\, d\sigma\,. \end{cases}$$

In queste formole, come nella citata Memoria, σ è la superficie che limita il corpo elastico; n la normale a σ diretta verso l'interno; G la

(¹) Levi-Civita, Mem. cit. pag. 30 e seg., o meglio vedi Nuovo Cimento, settembre 1903.

(²) Presentata nella seduta del 17 gennaio 1904.

(³) Tom. VIII, ser. III, pag. 129 e seg., *Saggio* ecc.