# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIII.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

la quale insieme alle (23) serve alla determinazione di $u_1$ e $v_1$. Ma a queste stesse equazioni e quindi alle stesse espressioni di $u_1$ e $v_1$ si giunge, coll'approssimazione considerata, anche nel caso in cui manca lo strato dielettrico sul piano conduttore $\sigma$ (¹). Di più si ha, giacchè si trascurano i termini in $a^2$, che è $F_2 = -\frac{m}{r'}$, quindi per la (18) è $\psi = 0$. Le componenti delle forze elettromagnetiche date dalle (2), (3) vengono quindi identiche a quelle che si hanno quando manca lo strato coibente. Il che ci permette di conchiudere che la presenza di un sottile strato dielettrico sul piano conduttore, quando si riguardano trascurabili le potenze di $a$ superiori alla prima, non porta alterazione nel campo generato dalla carica mobile. Relativamente alle componenti della forza magnetica si può riconoscere anche facilmente che lo strato dielettrico non porta in esse alterazione, ancorchè ci si limiti a trascurare solo le potenze di $a$ superiori alla seconda; infatti si ricava in modo simile al precedente che negli sviluppi (20) deve essere $f_3 = 0$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$, quindi le componenti delle forze magnetiche date dalle (3) rimangono le stesse di prima.

Per considerare il caso in cui lo strato dielettrico è disteso sul piano conduttore dalla parte delle $\zeta$ negative, basta mutare $l$ in $-l$ nelle precedenti equazioni; si giunge quindi ad un resultato identico.

## Meccanica. — *Sul problema dell'equilibrio elastico di un cilindro circolare indefinito.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA (²).

1. Ricordiamo che, secondo le indicazioni date in una mia Memoria degli Annali di matematica (³), quando sulla superficie di un corpo elastico, isotropo, in equilibrio, sono date le componenti $u, v, w$ degli spostamenti, in un punto interno al corpo, di coordinate $x, y, z$, supposta nota la dilatazione $\theta$, le $u, v, w$ sono date dalle formole:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma u\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma\,, \\ v = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma v\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,y\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \eta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma\,, \\ w = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma w\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,z\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \zeta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma\,. \end{cases}$$

In queste formole, come nella citata Memoria, $\sigma$ è la superficie che limita il corpo elastico; $n$ la normale a $\sigma$ diretta verso l'interno; G la

(¹) Levi-Civita, Mem. cit. pag. 30 e seg., o meglio vedi Nuovo Cimento, settembre 1903.

(²) Presentata nella seduta del 17 gennaio 1904.

(³) Tom. VIII, ser. III, pag. 129 e seg., *Saggio* ecc.

funzione di Green della quale, in questo lavoro, ci serviamo soltanto per rappresentare sinteticamente una funzione armonica che in superficie acquista certi valori; $\lambda$ e $\mu$ sono le due costanti di Lamé e $\xi, \eta, \zeta$ le coordinate di un punto di $\sigma$. Ricordiamo, inoltre, che il problema dell'equilibrio elastico, consiste, principalmente, nel determinare la funzione armonica $\theta$ in modo che, nell'interno del corpo elastico, sia, in modo identico,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \,. \tag{2}$$

2. Del problema che ora ci proponiamo di risolvere, daremo qui soltanto una indicazione sommaria, richiedendo l'esposizione completa di esso più spazio che non ci sia consentito.

Supponiamo dunque che la superficie cilindrica limitante il nostro corpo, sia indefinita da ambo le parti, abbia per asse l'asse $x$ e indichiamo con R il raggio della sezione circolare. Introducendo un sistema di coordinate cilindriche $x, l, \psi$ in modo che:

$$y = l \cos \psi \quad , \quad z = l \,\mathrm{sen}\, \psi \,, \tag{3}$$

per le note formole di Kirchhoff [1], potremo porre:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma u \frac{dG}{dn}\, d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} [u_\nu(\xi) \cos \nu\psi + \\
&\qquad + \overline{u}_\nu(\xi)\, \mathrm{sen}\, \nu\psi] \cos t(\xi - x)\, d\xi \,, \\
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma v \frac{dG}{dn}\, d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} [v_\nu(\xi) \cos \nu\psi + \\
&\qquad + \overline{v}_\nu(\xi)\, \mathrm{sen}\, \nu\psi] \cos t(\xi - x)\, d\xi \,, \\
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma w \frac{dG}{dn}\, d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} [w_\nu(\xi) \cos \nu\psi + \\
&\qquad + \overline{w}_\nu(\xi)\, \mathrm{sen}\, \nu\varphi] \cos t(\xi - x)\, d\xi \,,
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

in cui $J_\nu$ è la solita funzione di Bessel di prima specie e d'ordine $\nu$ e $i$ l'unità immaginaria.

Le funzioni $u_\nu, \overline{u}_\nu$ ; $v_\nu, \overline{v}_\nu$ ; $w_\nu, \overline{w}_\nu$ di $\xi$ si devono ritenere date e supponiamo che soddisfino alle condizioni di Dirichlet e si annullino all'infinito di ordine maggiore al primo; mentre i valori di $u, v, w$ dati su $\sigma$, considerati come funzioni di $\psi$, si devono supporre sviluppabili in serie trigonometriche.

[1] Crelle, Journal f. M., Bd. 48, S. 348, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen.*

Essendo $\theta$ una funzione armonica, potremo anche porre

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty {}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta_\nu(\xi) \cos \nu\psi + \bar{\theta}_\nu(\xi) \operatorname{sen} \nu\psi] \cos t(\xi - x)\, d\xi \tag{5}$$

ed il nostro problema consiste nel determinare le funzioni incognite $\theta_\nu$ e $\bar{\theta}_\nu$ per mezzo delle funzioni $u_\nu, \bar{u}_\nu; v_\nu, \ldots$ In quanto alle funzioni $\theta_\nu$ e $\bar{\theta}_\nu$ noi supponiamo che soddisfino alle stesse condizioni delle funzioni $u_\nu, \bar{u}_\nu, \ldots$ La giustificazione di queste ipotesi si otterrebbe con la verifica della soluzione del problema, *a posteriori*.

Ora, dall'ipotesi che $\theta$ sia data dalla (5), discende che su $\sigma$ dev'essere

$$\theta = \sum_0^\infty {}_\nu [\theta_\nu(\xi) \cos \nu\psi + \bar{\theta}_\nu(\xi) \operatorname{sen} \nu\psi],$$

quindi, su $\sigma$, si avrà ancora:

$$\eta\theta = R \cos\psi \sum_0^\infty {}_\nu [\theta_\nu(\xi) \cos\nu\psi + \bar{\theta}_\nu(\xi) \operatorname{sen}\nu\psi] = \frac{R}{2} \theta_0(\xi) \cos\psi + \frac{R}{2} \sum_0^\infty {}_\nu \{[\theta_{\nu+1}(\xi) + \theta_{\nu-1}(\xi)] \cos\nu\psi + [\bar{\theta}_{\nu+1}(\xi) + \bar{\theta}_{\nu-1}(\xi)] \operatorname{sen}\nu\psi\}$$

$$\zeta\theta = \frac{R}{2} \theta_0(\xi) \operatorname{sen}\psi + \frac{R}{2} \sum_0^\infty {}_\nu \{[\theta_{\nu-1}(\xi) - \theta_{\nu+1}(\xi)] \operatorname{sen}\nu\psi - [\bar{\theta}_{\nu-1}(\xi) - \bar{\theta}_{\nu+1}(\xi)] \cos\nu\psi\},$$

purchè si ritengano $\bar{\theta}_0 = \theta_{-1} = \bar{\theta}_{-1} = 0$. Potremo perciò scrivere:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\theta \frac{dG}{dn} d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty {}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \xi [\theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \\
&\qquad + \bar{\theta}_\nu(\xi) \operatorname{sen}\nu\psi] \cos t(\xi - x)\, d\xi, \\
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\theta \frac{dG}{dn} d\sigma &= \frac{R}{4\pi} \cos\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(itl)}{J_1(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(\xi) \cos t(\xi - x)\, d\xi + \\
&\quad + \frac{R}{4\pi} \sum_0^\infty {}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \{[\theta_{\nu+1}(\xi) + \theta_{\nu-1}(\xi)] \cos\nu\psi + \\
&\qquad + [\bar{\theta}_{\nu+1}(\xi) + \bar{\theta}_{\nu-1}(\xi)] \operatorname{sen}\nu\psi\} \cos t(\xi - x)\, d\xi, \\
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\theta \frac{dG}{dn} d\sigma &= \frac{R}{4\pi} \operatorname{sen}\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(itl)}{J_1(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(\xi) \cos t(\xi - x)\, d\xi + \\
&\quad + \frac{R}{4\pi} \sum_0^\infty {}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(itR)} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \{[\theta_{\nu-1}(\xi) - \theta_{\nu+1}(\xi)] \operatorname{sen}\nu\psi - \\
&\qquad - [\bar{\theta}_{\nu-1}(\xi) - \bar{\theta}_{\nu+1}(\xi)] \cos\nu\psi\} \cos t(\xi - x)\, d\xi.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Sostituendo questi risultati nelle equazioni (1) si ricavano i valori di $u, v, w$. Quindi, sostituendo i valori di $u, v, w$, così ottenuti, nell'equazione (2), riducendo il secondo membro della stessa equazione alla forma di Kirchhoff (ciò è possibile per essere questo secondo membro una funzione armonica, e lo scopo, del resto, si raggiunge subito applicando le più semplici proprietà delle funzioni di Bessel), eguagliando da ambo le parti i coefficienti di $\cos \nu\psi$ e di $\operatorname{sen} \nu\psi$ e poi facendo $l = \mathrm{R}$, si trovano le equazioni seguenti:

$$(7) \quad \theta_\nu(x) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}it \frac{\mathrm{J}'_\nu(it\mathrm{R})\,[\mathrm{J}_{\nu-1}(it\mathrm{R})\,\mathrm{J}_{\nu+1}(it\mathrm{R}) - \mathrm{J}^2_\nu(it\mathrm{R})]}{\mathrm{J}_{\nu-1}(it\mathrm{R})\,\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})\,\mathrm{J}_{\nu+1}(it\mathrm{R})}\, dt \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\nu(\xi) \cos t(\xi - x)\, d\xi = \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \Big\{ u'_\nu(x) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{v_{\nu+1}(\xi) + \overline{w}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}(it\mathrm{R})} + \frac{\overline{w}_{\nu-1}(\xi) - v_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}(it\mathrm{R})} \right] \cos t(\xi - x)\, d\xi \Big\}.$$

Le funzioni $\overline{\theta}_\nu$ soddisfano alle stesse equazioni salvo a mutare nel secondo membro $u_\nu, v_\nu, w_\nu$ in $\overline{u}_\nu, \overline{v}_\nu - \overline{w}_\nu$. Soltanto è da osservare che per $\nu = 1$ il secondo membro è leggermente diverso, mentre, per $\nu = 0$, l'equazione, pur rimanendo sempre dello stesso tipo, va leggermente modificata anche al primo membro.

3. Tutte queste equazioni sono del tipo

$$(8) \qquad \theta(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi) \cos t(\xi - x)\, d\xi = f(x)$$

dove $\varphi(t)$ ed $f(x)$ sono funzioni note e $\theta(x)$ la funzione da determinare. Inoltre, nel nostro caso $\varphi(t)$, oltre essere reale, è pari e si annulla tanto per $t = +\infty$ come per $t = -\infty$, come si trova subito considerando il valore assintotico di $\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})$ che è

$$\frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi\mathrm{R}}} \frac{e^{\mathrm{R}t}}{\sqrt{t}} \text{ per } t = +\infty \text{ e } \frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi\mathrm{R}}} \frac{e^{-\mathrm{R}t}}{\sqrt{t}} \text{ per } t = -\infty .$$

Si proverebbe inoltre facilmente che $1 + \varphi(t)$ non si annulla mai al finito, mentre $f(x)$, in seguito alle condizioni imposte alle $u_\nu, \overline{u}_\nu$; $v_\nu, \ldots$, si annulla all'infinito positivo e negativo di ordine maggiore di uno; ma, per brevità, sopprimiamo questa dimostrazione.

Per determinare ora $\theta(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (8) per $\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\cos t(\xi - x)\, dt\, d\xi}{1 + \varphi(t)}$, dopo aver cambiato in essa $x$ in $\xi$, $\xi$ in $\xi_1$,

$t$ in $t_1$, e integriamo due volte fra $-\infty$ e $+\infty$. Avremo così

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t(\xi-x)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\,dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi_1)\cos t_1(\xi_1-\xi)\,d\xi_1 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi .$$

Cangiando ora nel secondo termine del primo membro la variabile $\xi$ in $\xi'$ con la relazione $\xi=\xi'+\xi_1$, si trova, per questo secondo termine, l'espressione

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\,\frac{\varphi(t_1)}{1+\varphi(t)}\,\theta(\xi_1)\,[\cos\xi'(t-t_1)\cos t(\xi_1-x)+$$
$$+\operatorname{sen}\xi'(t-t_1)\operatorname{sen}t(x-\xi_1)] .$$

Se $\theta(x)$ soddisfa alle condizioni supposte, essa si deve annullare all' infinito positivo e negativo di ordine maggiore di uno ed allora, nell' espressione precedente, possiamo invertire l' ultimo integrale col terzo e col secondo e quindi possiamo porre questa espressione anche sotto la forma

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi_1)\cos t(\xi_1-x)\,d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\cos\xi'(t-t_1)\,dt_1+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi_1)\operatorname{sen}t(x-\xi_1)\,d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\operatorname{sen}\xi'(t-t_1)\,dt_1 .$$

Ma

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\cos\xi'(t-t_1)\,dt=\varphi(t),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\operatorname{sen}\xi'(t-t)\,dt_1=0,$$

quindi il primo membro della (9) diventa

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi=\theta(x);$$

ed abbiamo la formola

$$(10)\qquad \theta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi$$

che soddisfa alle condizioni volute.

Questo risultato mostra che il nostro problema ha una soluzione ed una sola.

Aggiungiamo che, se $\varphi(t)$ non è pari, la formola d' inversione della (8) è la seguente

$$\theta(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{2+\varphi(t)+\varphi(-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi\,.$$

4. Accenniamo, più rapidamente ancora, al caso in cui in superficie sono date le tensioni.

Per i risultati della citata Memoria, supposto noti la dilatazione $\theta$ e le componenti della rotazione $\varpi_1$, $\varpi_2$, $\varpi_3$, le componenti degli spostamenti, in un punto interno al cilindro, saranno date dalle formole:

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
u&=\frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma \mathrm{L}\mathrm{G}_1\,d\sigma-\frac{1}{4\pi\mathrm{R}}\int_\sigma(\eta\varpi_3-\zeta\varpi_2)\,\mathrm{G}_1\,d\sigma-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,x\theta-\\
&\qquad-\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma\xi\frac{d\theta}{dn}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma\,,\\
v&=\frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma \mathrm{M}\mathrm{G}_1\,d\sigma+\frac{1}{8\pi\mathrm{R}}\int_\sigma(\eta\theta-2\zeta\varpi_1)\,\mathrm{G}_1\,d\sigma-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,y\theta-\\
&\qquad-\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma\eta\frac{d\theta}{dn}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma\,,\\
w&=\frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma \mathrm{N}\mathrm{G}_1\,d\sigma+\frac{1}{8\pi\mathrm{R}}\int_\sigma(\zeta\theta+2\eta\varpi_1)\,\mathrm{G}_1\,d\sigma-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,z\theta-\\
&\qquad-\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma\zeta\frac{d\theta}{dn}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma\,,
\end{aligned}\right.$$

per essere su $\sigma$: $\cos n\xi=0$, $\cos n\eta=-\frac{\eta}{\mathrm{R}}$, $\cos n\zeta=-\frac{\zeta}{\mathrm{R}}$. E ricordiamo che, in queste formole, L, M, N rappresentano le componenti delle tensioni date in superficie e $\mathrm{G}_1$ quella funzione che ora, molto opportunamente, si vuole chiamare funzione di Neumann e che serve a risolvere il problema della determinazione della funzione armonica la cui derivata normale acquista in superficie dati valori. Il nostro problema, come si sa, consiste nel determinare $\theta$; $\varpi_1$, $\varpi_2$, $\varpi_3$ in modo che sieno verificate identicamente le relazioni:

$$(12)\qquad \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\;;\;2\varpi_1=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\,,\;2\varpi_2=\cdots$$

Perciò poniamo:

$$(13)\quad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{L}\mathrm{G}_1\,d\sigma=-\frac{i}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_\nu(itl)}{\mathrm{J}'_\nu(it\mathrm{R})}\frac{dt}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathrm{L}_\nu(\xi)\cos\nu\psi+\\
+\overline{\mathrm{L}}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,,$$

mentre $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma MG_1\,d\sigma$ , $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma NG_1\,d\sigma$ saranno rappresentate dalla stessa formola dove al posto di $L_\nu, \overline{L}_\nu$ si pongano rispettivamente le funzioni $M_\nu, \overline{M}_\nu$; $N_\nu, \overline{N}_\nu$ che, come le $L_\nu, \overline{L}_\nu$, noi supponiamo date.

Poniamo ora, ipoteticamente, per i valori di $\theta$ ; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ su $\sigma$:

$$\theta = \sum_0^\infty{}_\nu \left[\theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \overline{\theta}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi\right]; \tag{14}$$

$$\varpi_i = \sum_0^\infty{}_\nu \left[\varpi_{i,\nu}(\xi)\cos\nu\psi + \overline{\varpi}_{i,\nu}(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi\right] \qquad i = 1, 2, 3.$$

Si potranno allora costruire le formole di Kirchhoff che ci danno $\theta$ ; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ nell' interno del cilindro. Dal valore di $\theta$ così costruito si deduce in particolare che su $\sigma$

$$\frac{d\theta}{dn} = -\frac{\partial\theta}{\partial l} = -\frac{i}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\theta_\nu(\xi_1)\cos\nu\psi + \overline{\theta}_\nu(\xi_1)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi\right]\cos t(\xi_1-\xi)\,d\xi_1. \tag{15}$$

Come nel primo caso si potranno poi costruire le espressioni di

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\theta\,G_1\,d\sigma,\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\theta\,G_1\,d\sigma\ ;\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\varpi_1\,G_1\,d\sigma,\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\varpi_1\,G_1\,d\sigma\ ;\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma(\eta\varpi_3-\zeta\varpi_2)\,G_1\,d\sigma$$

e tenendo presente la (15) si stabiliscono facilmente anche le formole seguenti:

$$(16)\ \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\frac{d\theta}{dn}G_1\,d\varrho = -x\theta + \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J_\nu(itl)}{t\,J'_\nu(itR)}\right)dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\theta'_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \overline{\theta}'_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi,\\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\frac{d\theta}{dn}G_1\,d\sigma = \\
&\quad=\frac{R}{2\pi}\cos\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J'_0(itR)}{J_0(itR)}\frac{J_1(itl)}{J'_1(itR)}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_0(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi + \\
&\quad+\frac{R}{4\pi}\sum_1^\infty{}_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\frac{J_{\nu+1}(itl)}{J'_{\nu+1}(itR)}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\theta_\nu(\xi)\cos(\nu+1)\psi + \overline{\theta}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}(\nu+1)\psi\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi + \\
&\quad+\frac{R}{4\pi}\sum_1^\infty{}_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\frac{J_{\nu-1}(itl)}{J'_{\nu-1}(itR)}dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\theta_\nu(\xi)\cos(\nu-1)\psi + \overline{\theta}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}(\nu-1)\psi\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi,
\end{aligned}\right.$$

e una formola analoga per $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\frac{d\theta}{dn}d\sigma$.

Sostituendo questi risultati nelle (11) e quindi i valori di $u, v, w$, così trovati nella prima e nella seconda delle (12), quindi cercando di soddisfare ad esse identicamente e ponendo $l = \mathrm{R}$, si trova, trascurando di scrivere nelle funzioni di Bessel l'argomento comune $it\mathrm{R}$:

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad & \theta_\nu(x) - \frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda+\mu)\,\mathrm{R}it\left[2\,\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}\left(1+\frac{\nu^2}{\mathrm{R}^2 t^2}\right)+\mathrm{J}'^2_\nu\,(\mathrm{J}'_{\nu-1}-\mathrm{J}'_{\nu+1})\right]+\mu\,\mathrm{J}_\nu\,\mathrm{J}'_\nu\,(\mathrm{J}'_{\nu-1}-\mathrm{J}'_{\nu+1})}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_\nu\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt \times \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\nu(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi - \\
& - \frac{i\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{J}_\nu}{\mathrm{J}'_\nu}\frac{dt}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\overline{\varpi}'_{3,\nu-1}(\xi)+\varpi'_{3,\nu+1}(\xi)+\overline{\varpi}'_{2,\nu-1}(\xi)-\overline{\varpi}'_{2,\nu+1}(\xi)\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi - \\
& - \frac{\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{J}_\nu(\mathrm{J}'_{\nu-1}+\mathrm{J}'_{\nu+1})}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varpi}_{1,\nu}(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi = \\
& = -\frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_\nu\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left[2i\frac{\mathrm{L}'_\nu(\xi)}{t\,\mathrm{J}'_\nu} - \frac{\mathrm{M}_{\nu+1}(\xi)+\overline{\mathrm{N}}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu+1}} + \frac{\mathrm{M}_{\nu-1}(\xi)-\overline{\mathrm{N}}_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu-1}}\right] \times \\
& \times \cos t(\xi-x)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad & 2\varpi_{1,\nu}(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_\nu \frac{\mathrm{J}'_{\nu-1}-\mathrm{J}'_{\nu+1}}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{1,\nu}(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi = \nu\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,\overline{\theta}_\nu(x) - \\
& - \frac{1}{8\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu\,\mathrm{J}_\nu+(\lambda+\mu)\,\mathrm{R}it\,\mathrm{J}'_\nu\right] \frac{\mathrm{J}'_{\nu-1}+\mathrm{J}'_{\nu+1}}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\theta}_\nu(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi - \\
& - \frac{1}{8\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_\nu\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\overline{\mathrm{M}}_{\nu+1}(\xi)-\mathrm{N}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu+1}} + \frac{\overline{\mathrm{M}}_{\nu-1}(\xi)+\mathrm{N}_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Le equazioni (18) mostrano che $\varpi_{1,\nu}, \overline{\varpi}_{1,\nu}$ sono determinate appena sieno note le $\theta_\nu, \overline{\theta}_\nu$ e ci possiamo servire di queste stesse equazioni per eliminare le $\varpi_{1,\nu}, \overline{\varpi}_{1,\nu}$ dalle (17). Per eliminare dalle (17) anche le $\varpi_{2,\nu}, \overline{\varpi}_{2,\nu}$; $\varpi_{3,\nu}, \overline{\varpi}_{3,\nu}$, e quindi poter determinare le $\theta_\nu, \overline{\theta}_\nu$, il metodo più semplice è il seguente. Cercando di soddisfare identicamente alle equazioni:

$$
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_3}{\partial x} - \frac{\partial\varpi_1}{\partial z}\right) = 0\ ,\quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial y} - \frac{\partial\varpi_2}{\partial x}\right) = 0
$$

con i valori presunti di $\theta$; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$, si trovano le equazioni seguenti:

$$
(19)\quad \begin{cases}
\varpi'_{3,\nu}(x) = -\dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\theta_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}-\frac{\theta_{\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,+ \\
\qquad +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}+\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,, \\
\overline{\varpi}'_{3,\nu}(x) = -\dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\theta}_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}-\frac{\overline{\theta}_{\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,- \\
\qquad -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varpi_{1,\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}+\frac{\varpi_{1,\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,,
\end{cases}
$$

$$
(20)\quad \begin{cases}
\varpi'_{2,\nu}(x) = \dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\theta}_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}+\frac{\overline{\theta}_{\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,+ \\
\qquad +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varpi_{1,\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}-\frac{\varpi_{1,\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,, \\
\overline{\varpi}'_{2,\nu}(x) = -\dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\theta_{\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}+\frac{\theta_{\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,+ \\
\qquad +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} itJ_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu+1}(\xi)}{J_{\nu+1}}-\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu-1}(\xi)}{J_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi\,,
\end{cases}
$$

le quali mostrano che l'espressione

$$\varpi'_{3,\nu-1}(\xi)+\overline{\varpi}'_{2,\nu-1}(\xi)+\varpi'_{3,\nu+1}(\xi)-\overline{\varpi}'_{2,\nu+1}(\xi),$$

per mezzo della quale le $\varpi_{2,\nu}$, $\overline{\varpi}_{2,\nu}$ ; $\varpi_{3,\nu}$, $\overline{\varpi}_{3,\nu}$ entrano nella (17), dipende da $\theta_\nu$ e $\overline{\varpi}_{1,\nu}$. Inoltre le (19) e (20) mostrano che determinate le $\theta_\nu$, $\overline{\theta}_\nu$, non solo restano determinate le $\varpi_{1,\nu}$, $\overline{\varpi}_{1,\nu}$, ma anche le $\varpi_{2,\nu}$, $\overline{\varpi}_{2,\nu}$ ; $\varpi_{3,\nu}$, $\overline{\varpi}_{3,\nu}$, ed il problema è risoluto completamente.

5. Per ragioni di spazio non ho potuto dar qui le formole definitive. Mi contenterò di aggiungere le osservazioni seguenti: 1°, se nel primo problema si suppone $u=0$ e $v$, $w$ indipendenti da $\xi$, e nel secondo $L=0$, M ed N indipendenti da $\xi$, le formole trovate ci danno le soluzioni di corrispondenti problemi di equilibrio di un cerchio elastico; 2°, scambiando le funzioni di Bessel di prima specie con quello di seconda specie, si ottengono le soluzioni di problemi di equilibrio elastico per lo spazio indefinito, esterno al cilindro; 3°, molti altri problemi si possono risolvere seguendo la stessa via; accennerò soltanto ai problemi di equilibrio elastico per lo spazio compreso fra due piani paralleli di cui ho dato delle soluzioni, fondate su principii differenti, in una Memoria che vedrà presto la luce negli Annali di Matematica.