ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Matematica. — *Sopra la equazione di Kepler.* Nota di T. LEVI-CIVITA, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

1. Per e abbastanza piccolo, la equazione di Kepler

$$u - e \operatorname{sen} u = \zeta \tag{1}$$

definisce univocamente la u come funzione regolare della e e del parametro ζ. Infatti la derivata del primo membro, rispetto ad u, $1 - e \cos u$ non si annulla per $e = 0$.

Lo sviluppo classico di u per potenze di e, fornito dalla serie di Lagrange è

$$u = \zeta + \sum_1^\infty {}_n \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1} \operatorname{sen}^n \zeta}{d\zeta^{n-1}}.$$

Il raggio di convergenza di questo sviluppo dipende in generale da ζ. Quando ζ varia comunque sopra l'asse reale, esso ha un limite inferiore e_1, notato già da Laplace e stabilito con procedimenti rigorosi dal sig. Rouché [2]. Questo limite $e_1 = 0{,}6627$ risulta definito da

$$\frac{2l}{E^l + E^{-l}},$$

dove l è la radice (unica positiva) della equazione

$$f(l) = -l(E^l - E^{-l}) + E^l + E^{-l} = 0.$$

(Per evitare ambiguità colla e si designa con E la base dei logaritmi neperiani).

Ciò posto, è chiaro che la serie sopra riportata resta convergente, per tutti i valori reali di ζ, solo sotto la condizione $|e| < e_1$. Ma, pur variando comunque ζ nel campo reale, la funzione $u(e, \zeta)$, definita dalla (1), è regolare rispetto ad e in un campo Γ (veggasi la figura) *maggiore* del cerchio $|e| = e_1$ e comprendente in particolare tutti i punti del segmento $(0, 1)$.

La ricerca — abbastanza elementare per verità — dei limiti di questo campo conduce naturalmente ad una rappresentazione analitica della funzione u, valida per tutti i punti del campo stesso. In modo preciso si ha il seguente semplicissimo risultato:

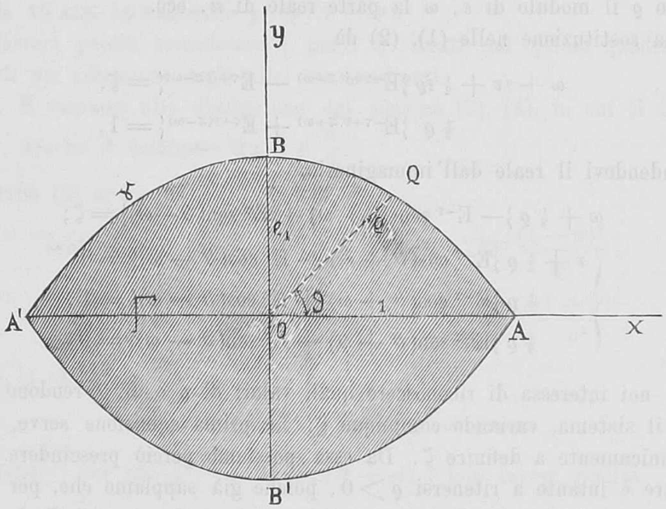
[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1904.

[2] *Sur la série de Lagrange*, Journal de l'École Polytechnique 39e Cahier, 1862. Cfr. Hermite, *Cours d'analyse*, 19e Leçon; oppure Tisserand, *Mécanique céleste*, T. I, Chap. XVI.

La funzione u di e, definita dalla equazione di Kepler è sviluppabile (per qualunque valore reale di ζ) *in serie di potenze dell'argomento*

$$\eta = \frac{e\,E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

(intendo pel radicale la determinazione, che si riduce all'unità per $e = 0$).



La serie converge entro il cerchio $|\eta| = 1$, *cui corrisponde nel piano e l'intero campo di regolarità* $\boldsymbol{\Gamma}$ *della funzione* u.

Come si vede, l'argomento η si annulla per $e = 0$ e cresce, per valori reali, da 0 ad 1, assieme ad e. Gli sviluppi procedenti per potenze di η presentano perciò, oltre al vantaggio della incondizionata validità per qualsiasi orbita ellittica, la stessa convenienza numerica degli sviluppi abituali, procedenti per potenze di e.

2. Il ramo della funzione u di e, definito senza ambiguità dalla (1), nell'intorno dell'origine O, resta certamente uniforme e regolare finchè non si annulla

$$1 - e\cos u.$$

Ne viene che, procedendo da O, nel piano e, lungo una linea qualsiasi, la regolarità di u può cessare, e cessa effettivamente (i corrispondenti valori di e essendo per la u punti critici di indice 2) solo quando sussistano insieme le due equazioni

$$(1) \qquad u - e \operatorname{sen} u = \zeta ,$$

$$(2) \qquad 1 - e \cos u = 0 .$$

Supponiamo ζ reale e vediamo quali condizioni se ne traggono per i valori di e, che le rendono soddisfatte.

Incominciamo col porre

$$e = \varrho \, E^{i\vartheta} \quad , \quad u = \omega + i\tau ,$$

essendo ϱ il modulo di e, ω la parte reale di u, ecc.

La sostituzione nelle (1), (2) dà

$$\omega + i\tau + \tfrac{1}{2} i\varrho \{E^{-\tau + i(\vartheta+\omega)} - E^{\tau + i(\vartheta-\omega)}\} = \zeta ,$$

$$\tfrac{1}{2} \varrho \{E^{-\tau + i(\vartheta+\omega)} + E^{\tau + i(\vartheta-\omega)}\} = 1 ,$$

e, scindendovi il reale dall' immaginario,

$$\omega + \tfrac{1}{2} \varrho \{- E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega)\} = \zeta ;$$

$$\begin{cases} \tau + \tfrac{1}{2} \varrho \{E^{-\tau} \cos(\vartheta + \omega) - E^{\tau} \cos(\vartheta - \omega)\} = 0 , \\ \tfrac{1}{2} \varrho \{E^{-\tau} \cos(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \cos(\vartheta - \omega)\} = 1 , \\ \tfrac{1}{2} \varrho \{E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega)\} = 0 . \end{cases}$$

A noi interessa di riconoscere quali valori di ϱ e di ϑ rendono soddisfatto il sistema, variando comunque ζ. La prima equazione serve, si può dire, unicamente a definire ζ. Da essa possiamo perciò prescindere. Nelle altre tre è intanto a ritenersi $\varrho > 0$, poichè già sappiamo che, per $\varrho = 0$ (il che implica $e = 0$), il ramo considerato è regolare e quindi le equazioni non possono essere soddisfatte. Ciò apparisce del resto direttamente dalla seconda di esse, il cui primo membro, per $\varrho = 0$ e τ finito, si annulla, mentre dovrebbe essere eguale all' unità. Ritenendo dunque $\varrho > 0$, le suddette tre equazioni potranno essere scritte

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos(\vartheta + \omega) = E^{\tau} \dfrac{1 - \tau}{\varrho} , \\ \cos(\vartheta - \omega) = E^{-\tau} \dfrac{1 + \tau}{\varrho} ; \end{cases}$$

$$(4) \qquad E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega) = 0 .$$

Si tratta di caratterizzare l' insieme γ (sarà, come vedremo, una curva) costituito dai punti $Q(\varrho , \vartheta)$ del piano e, per i quali risultano soddisfatte le (3), (4), essendo τ ed ω quantità (reali, s' intende) a priori indeterminate.

In primo luogo è lecito limitarsi a valori positivi di τ. Infatti il sistema (3), (4) si trasforma in sè stesso, quando si cambiano τ ed ω in $-\tau$, $-\omega$, senza toccare ϱ e ϑ; e questo equivale a dire che l'insieme dei punti Q, corrispondenti a valori positivi di τ, non differisce dall'insieme corrispondente a valori negativi. L'uno e l'altro coincidono dunque con γ.

Si noti ancora che il sistema (3), (4) non cambia, quando, lasciando inalterati ϱ e τ, si cambiano ϑ ed ω:

1° in $-\vartheta$, $-\omega$;

2° in $\pi-\vartheta$, $\pi-\omega$.

Ne viene che, assieme ad ogni punto (ϱ, ϑ), appartengono a γ anche il punto simmetrico rispetto all'asse reale x, $(\varrho, -\vartheta)$, e il punto simmetrico rispetto all'asse immaginario y, $(\varrho, \pi-\vartheta)$.

Basterà perciò considerare i punti Q situati nel primo quadrante, e ripeterli per riflessione negli altri tre quadranti.

3. E veniamo alla discussione del sistema (3), (4), in cui si intenda $\tau \geq 0$, nonchè ϑ compreso fra 0 e $\dfrac{\pi}{2}$.

Dalle (3) si ha

$$\operatorname{sen}^2(\vartheta+\omega)=1-\cos^2(\vartheta+\omega)=1-E^{2\tau}\frac{(1-\tau)^2}{\varrho^2},$$

$$\operatorname{sen}^2(\vartheta-\omega)=1-\cos^2(\vartheta-\omega)=1-E^{-2\tau}\frac{(1+\tau)^2}{\varrho^2},$$

mentre la (4) porge

$$E^{2\tau}\operatorname{sen}^2(\vartheta-\omega)=E^{-2\tau}\operatorname{sen}^2(\vartheta+\omega),$$

e, portandovi per $\operatorname{sen}^2(\vartheta-\omega)$, $\operatorname{sen}^2(\vartheta+\omega)$ i loro lavori, risulta

$$\frac{1}{\varrho^2}=\frac{E^{2\tau}-E^{-2\tau}}{4\tau}=1+\frac{2}{3}\tau^2+\frac{2}{15}\tau^4+\cdots \tag{5}$$

Questa equazione determina univocamente un valore positivo ϱ in funzione di τ. Ma non ad ogni valore di τ corrisponde una soluzione del nostro sistema. Bisogna che, portando nelle (3) la espressione (5) di ϱ, i secondi membri non superino l'unità in valore assoluto. Bisogna dunque che

$$E^{2\tau}(1-\tau)^2\frac{E^{2\tau}-E^{-2\tau}}{4\tau}\leq 1\ ,\ E^{-2\tau}(1+\tau)^2\frac{E^{2\tau}-E^{-2\tau}}{4\tau}\leq 1,$$

le quali, posto per brevità

$$N=\frac{(1+\tau)^2E^{-2\tau}-(1-\tau)^2E^{2\tau}}{4\tau}, \tag{6}$$

equivalgono all'unica disuguaglianza $N>0$, cioè anche a

$$(1+\tau)E^{-\tau}-|1-\tau|E^{\tau}\geq 0. \tag{7}$$

Per $\tau \leq 1$, si ha $|1-\tau| = 1-\tau$ e la (7) è senz'altro soddisfatta. Infatti il primo membro si annulla per $\tau = 0$, e cresce poi con τ, perchè la derivata

$$\tau(E^{\tau} - E^{-\tau})$$

è sempre positiva.

Se invece $\tau \geq 1$, $|1-\tau| = \tau - 1$, e la (7), ponendo ancora

$$f(\tau) = -\tau(E^{\tau} - E^{-\tau}) + (E^{\tau} + E^{-\tau}),$$

si scriverà

$$(7') \qquad f(\tau) \geq 0.$$

La derivata

$$f'(\tau) = -\tau(E^{\tau} + E^{-\tau})$$

è negativa per τ positivo, la f va dunque decrescendo. Essa è positiva per $\tau = 1$, negativa per $\tau = 2$; si annulla quindi per un valore intermedio l. Perciò la (7') riesce soddisfatta fra 1 e l, ma cessa di esserlo oltre l, in quanto la f, seguitando a decrescere, diventa e si mantiene negativa.

La equazione $f(l) = 0$ è quella stessa, che si incontra cercando il minimo raggio di convergenza (per ζ reale) dello sviluppo di u in serie di potenze di e. Il valore numerico della radice l è 1,9967.

Messo in chiaro che sono da considerare soltanto valori di τ, compresi fra 0 ed l, mostriamo reciprocamente che ad ognuno di essi corrisponde uno ed un sol punto Q del primo quadrante.

Il modulo ϱ è, come si è visto, determinato senza ambiguità dalla (5). Quanto all'argomento ϑ, abbiamo le (3) e le

$$\operatorname{sen}(\vartheta + \omega) = \pm E^{\tau} \sqrt{N} \quad , \quad \operatorname{sen}(\vartheta - \omega) = \pm E^{-\tau} \sqrt{N},$$

che ne sono necessaria conseguenza in virtù delle (5), (6). Portando questi valori nella (4) si riconosce che i radicali vanno presi con segno opposto, e con ciò la (4) stessa rimane identicamente soddisfatta.

Essendo poi

$$\cos 2\vartheta = \cos(\vartheta + \omega)\cos(\vartheta - \omega) - \operatorname{sen}(\vartheta + \omega)\operatorname{sen}(\vartheta - \omega),$$

ricaviamo in definitiva

$$(8) \quad \cos 2\vartheta = \frac{1-\tau^2}{\varrho^2} + N = -\tau\,\frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{2} + \frac{E^{2\tau} + E^{-2\tau}}{2} = 1 - \frac{2}{3}\tau^4 + \cdots,$$

la quale determina univocamente un angolo 2ϑ non maggiore di due retti, e quindi uno ed un solo angolo ϑ del primo quadrante.

Le considerazioni precedenti ci assicurano che, al variare di τ fra zero ed l, il secondo membro della (8) rimane compreso fra -1 e $+1$. Se ne ha la riprova, notando:

1°. che, per $\tau = 0$, $\cos 2\vartheta = 1$.
2°. che $\cos 2\vartheta$ decresce con τ.

Infatti, essendo

$$\frac{d \cos 2\vartheta}{d\tau} = -\tau(E^{2\tau} + E^{-2\tau}) + \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{2},$$

$$\frac{d^2 \cos 2\vartheta}{d\tau^2} = -2\tau(E^{2\tau} - E^{-2\tau}) \; (< 0 \,,\ \text{per } \tau > 0),$$

la funzione $\dfrac{d \cos 2\vartheta}{d\tau}$ è decrescente, e, siccome, per $\tau = 0$, si annulla, così, per valori positivi di τ, essa è negativa, e quindi $\cos 2\vartheta$ decresce.

3°. che, per $\tau = l$, $\cos 2\vartheta = -1$.

Ciò risulta dall'essere l radice dell'equazione $f(l) = 0$, donde

$$l(E^l - E^{-l}) = E^l + E^{-l}.$$

Posta infatti la espressione di $\cos 2\vartheta$ sotto la forma

$$\tfrac{1}{2}\{-\tau(E^\tau - E^{-\tau})\,(E^\tau + E^{-\tau}) + E^{2\tau} + E^{-2\tau}\},$$

quando vi si fa $\tau = l$, e si sostituisce $l(E^l - E^{-l})$ col suo valore $E^l + E^{-l}$, rimane effettivamente

$$\cos 2\vartheta = \tfrac{1}{2}\{-(E^l + E^{-l})^2 + E^{2l} + E^{-2l}\} = -1.$$

Da queste osservazioni emerge che, al variare di τ da 0 ad l, l'anomalia ϑ varia, costantemente crescendo, da 0 a $\dfrac{\pi}{2}$.

Il raggio vettore ϱ va invece costantemente decrescendo (il suo inverso $\dfrac{1}{\varrho}$ costantemente crescendo), poichè si ha dalla (5)

$$\frac{d\dfrac{1}{\varrho^2}}{d\tau} = \frac{1}{4\tau^2}\{2\tau(E^{2\tau} + E^{-2\tau}) - (E^{2\tau} - E^{-2\tau})\} = -\frac{1}{2\tau^2}\,\frac{d \cos 2\vartheta}{d\tau}, \tag{9}$$

e il secondo membro è costantemente positivo, per quanto è stato ora osservato. Il minimo di ϱ è dunque raggiunto per $\tau = l$ e quindi $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$. Tale minimo valore viene definito, a norma della (5), da

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{E^{2l} - E^{-2l}}{4l} = \frac{l(E^l - E^{-l})\,(E^l + E^{-l})}{4l^2},$$

la quale, usufruendo qui ancora la $f(l)=0$, porge

$$\varrho = \frac{l}{E^l + E^{-l}}$$

che è la espressione nota del minimo raggio di convergenza e_1, ricordata al n. 1.

Riassumendo, possiamo concludere:

I punti Q *del primo quadrante corrispondono univocamente ai valori di* τ *dell'intervallo* $(0, l)$, *a norma delle equazioni* (5), (8), *e costituiscono in conseguenza un arco di curva analitica* AB. *Quest'arco incomincia* $(\tau=0)$ *nel punto* A *dell'asse reale* x, *distante* 1 *dall'origine, e termina* $(\tau=l)$ *nel punto* B *dell'asse* y, *situato alla (minima) distanza* $e_1=0{,}6627$. *Fra* A *e* B *il raggio vettore varia costantemente decrescendo.*

Cerchiamo ancora l'angolo α, che la tangente alla curva in un punto generico Q forma colla direzione positiva dell'asse x.

Si ha $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$; quindi, dalle $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\operatorname{sen}\vartheta$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\vartheta\, d\varrho + \varrho\cos\vartheta\, d\vartheta}{\cos\vartheta\, d\varrho - \varrho\operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta}.$$

Moltiplicando sopra e sotto per $-2\,\dfrac{\operatorname{sen}2\vartheta}{\varrho^3}$, potremo scrivere

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\,\dfrac{d\frac{1}{\varrho^2}}{d\tau} + \dfrac{\cos\vartheta}{\varrho^2}\,\dfrac{d\cos2\vartheta}{d\tau}}{\operatorname{sen}2\vartheta\cos\vartheta\,\dfrac{d\frac{1}{\varrho^2}}{d\tau} - \dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2}\,\dfrac{d\cos2\vartheta}{d\tau}},$$

che, avuto riguardo alla (9), si riduce a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\vartheta\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\tau^2} - \dfrac{1}{\varrho^2}\right)}{\cos^2\vartheta\,\dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\tau^2} + \dfrac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2}}.$$

Escluso per un momento il valore zero di τ, e quindi anche di ϑ, il denominatore è manifestamente finito e >0; il numeratore è pure finito e si annulla con $\cos\vartheta$. Ne viene $\operatorname{tg}\alpha=0$, per $\vartheta=\dfrac{\pi}{2}$.

Al convergere di τ a zero, si ha

$$\varrho = 1 \, , \; \lim_{\tau=0} \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \; (^1),$$

e per conseguenza $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$.

La tangente in A (nel verso AB) è dunque inclinata sulla direzione positiva dell'asse x di 120°, cioè sulla AO di 60°. La tangente in B è invece parallela all'asse x.

Se ora si riflette l'arco di curva AB negli altri tre quadranti, si ottiene (cfr. la figura) una curva chiusa γ, che ha in A e nel suo simmetrico A′ due punti angolosi di apertura 120°, mentre c'è perfetto raccordo in B e B′.

La curva γ *costituisce il contorno completo del campo di regolarità* Γ *della nostra funzione* u, poichè ogni punto Q di γ è effettivamente singolare per qualche valore reale del parametro ζ. Risulta infatti dalle precedenti considerazioni che ad ogni Q corrispondono due valori eguali ed opposti di τ e di ω, per i quali coesistono le (1) (2) (con ζ reale). I primi sono univocamente determinati, i secondi a meno di multipli di 2π. La (1) stessa poi (essendo $u = \omega + i\tau$) coordina ad ogni punto Q due valori reali di ζ, eguali ed opposti (e i loro congrui rispetto a 2π).

4. La funzione u di e (ritenuto ζ comunque variabile nel campo reale) è regolare entro Γ, e non oltre. Secondo i principî della teoria delle funzioni, la naturale espressione analitica di u in Γ è quella di una serie di potenze del parametro $\eta(e)$, che realizza la rappresentazione conforme di Γ sopra un cerchio di raggio 1.

Nel caso presente la determinazione di η è pressochè immediata.

Ricordiamo infatti che in ogni punto Q del contorno γ di Γ valgono ad un tempo le (1), (2). Dalla (2) si ha

$$e \operatorname{sen} u = \sqrt{e^2 - 1} = i\sqrt{1 - e^2} \, ,$$

con che la (1) può essere scritta

$$u = \zeta + i\sqrt{1 - e^2},$$

e la (2) stessa

$$\mathrm{E}^{iu} = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \, .$$

Sostituendovi per u il suo valore $\zeta + i\sqrt{1 - e^2}$, se ne ricava

$$\mathrm{E}^{i\zeta} = \frac{e\,\mathrm{E}^{\sqrt{1-e^2}}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \, ,$$

(1) Questo risulta subito dalla (8), in quanto

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} = \frac{1}{3}\tau^4 + \cdots$$

la quale viene dunque soddisfatta da valori reali di ζ in ogni punto Q, e ciò per entrambe le determinazioni del radicale $\sqrt{1-e^2}$ (¹).

Ne viene che, sul contorno γ, la funzione $\dfrac{e\,E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}$ (anzi ciascuna delle due determinazioni, che la funzione comporta) ha modulo eguale all'unità.

D'altra parte, se immaginiamo di tagliare il piano e dai punti 1 e -1 fino a $+\infty$ e $-\infty$ rispettivamente, e di fissare per il radicale $\sqrt{1-e^2}$ la determinazione $=1$, per $e=0$, la

$$\eta=\frac{e\,E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

costituisce un ramo uniforme di funzione della variabile complessa e, regolare nel piano così tagliato, e in particolare entro Γ. Sopra γ è $|\eta|=1$. La derivata di η rapporto ad e

$$\frac{\sqrt{1-e^2}\,E^{\sqrt{1-e^2}}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

non si annulla entro Γ (le sue radici sono evidentemente solo ± 1).

Per queste tre proprietà la η effettua la rappresentazione conforme del campo Γ sopra un cerchio di raggio 1.

Val forse la pena di rilevare che, per essere la funzione η olomorfa anche nei punti B e B′ ($\pm i\,e_1$) del contorno γ, si ha in questi punti non solo raccordo grafico (ciò che già sapevamo), ma vera e propria continuazione analitica.

Fisica. — *Azione del radio sulla scintilla elettrica* (²). Nota del prof. A. Stefanini e del dott. L. Magri, presentata dal Corrispondente A. Battelli (³).

È nota l'azione che la luce ultravioletta ed i raggi Röntgen esercitano sulle scintille; azione che è molto complessa e che varia con la forma, la distanza e il segno dei poli.

Senza entrare in tutti i particolari del fenomeno, del quale sotto diversi punti di vista si sono occupati molti sperimentatori, ricorderemo soltanto esperienze che più da vicino interessano il nostro studio.

(¹) In quanto, come è stato osservato alla fine del numero precedente, ad ogni punto Q convengono valori eguali ed opposti di u e di ζ; quindi, per la equazione testè incontrata $u=\zeta+i\sqrt{1-e^2}$, anche valori eguali ed opposti del radicale.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa.

(³) Presentata nella seduta del 21 febbraio 1904.