ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 10 aprile 1904.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni dell'elasticità.* Nota del Corrispondente C. Somigliana [1].

In una Nota inserita nei Rendiconti di questa R. Accademia nel febbraio del 1902 [2] ho dimostrato un teorema che può considerarsi come equivalente al principio delle immagini di Lord Kelvin rispetto alle equazioni della elasticità nel caso di corpi limitati da piani, e ne ho date alcune applicazioni per la integrazione delle equazioni stesse in alcuni casi già noti ed in altri non ancora trattati. Ritorno ora su quel teorema per mostrarne in via generale le applicazioni e passare rapidamente in rassegna i nuovi problemi di statica elastica che mediante di esso si possono risolvere.

1. Dalle equazioni dell'equilibrio elastico, quando le forze di massa sono nulle come sempre supporremo in seguito, con un procedimento ben noto si ottiene la relazione.

$$(1)\qquad \int_s (\mathrm{L}u + \mathrm{M}v + \mathrm{N}w)\, ds + 2\int_{\mathrm{S}} \Pi\, d\mathrm{S} = 0$$

[1] Presentata nella seduta del 20 marzo 1904.

[2] *Sul principio delle immagini di Lord Kelvin e le equazioni della elasticità.*

ove u, v, w sono le componenti dello spostamento elastico, L, M, N quelle delle forze applicate sulla superficie, Π il potenziale d'elasticità, S lo spazio occupato dal corpo, s la sua superficie.

Questa relazione serve, come è notissimo, a dimostrare l'unicità della soluzione delle equazioni di equilibrio (all'infuori di movimenti rigidi del corpo) quando sopra la superficie s sono conosciute le componenti u, v, w oppure le L, M, N od anche alcune delle prime ed alcune delle seconde, in modo però che annullando questi elementi il trinomio $Lu + Mv + Nw$ si annulli parimenti.

Ora indichiamo con P_n la componente della pressione esterna secondo la normale alla superficie e con P_t, $P_{t'}$, le componenti della stessa pressione secondo due direzioni comunque fissate nel piano tangente, ad esempio secondo le due direzioni delle linee di curvatura della superficie s nel punto che si considera. Analogamente indichiamo con s_n, s_t, $s_{t'}$, le componenti dello spostamento secondo le stesse direzioni. Avremo

$$Lu + Mv + Nw = P_n s_n + P_t s_t + P_{t'} s_{t'}$$

e quindi sostituendo nella (1)

$$\int_s (P_n s_n + P_t s_t + P_{t'} s_{t'})\, ds + 2 \int_S \Pi \, dS = 0 .$$

Da questa relazione risulta che la deformazione del corpo sarà determinata quando siano date sulla superficie s:

1° s_n, P_t, $P_{t'}$

oppure

2° P_n, s_t, $s_{t'}$;

cioè, nel primo caso, la componente normale dello spostamento e le componenti tangenziali della pressione, o anche, possiamo dire, la componente normale dello spostamento e *la componente tangenziale* della pressione, intendendo che questa componente sia data in grandezza e direzione. Nel secondo caso potremo dire che il problema dell'equilibrio è determinato quando sulla superficie sia nota la componente normale della pressione e la componente tangenziale dello spostamento.

Quando sulla superficie invece siano date

3° s_n, s_t, $s_{t'}$

4° P_n, P_t, $P_{t'}$

abbiamo i casi che più ordinariamente si considerano e che sono anche quelli che più comunemente si presentano in questioni meccaniche. Ma anche i problemi primo e secondo sono stati in alcuni casi studiati, e non è escluso che corrispondano ad effettivi problemi meccanici. Così quando si abbia un corpo soggetto alla pressione dell'ambiente, ad es. della pressione atmosferica e questa pressione sia nota, basterà, per conoscerne la deformazione, che siano conosciute le componenti tangenziali degli spostamenti subiti dai punti della sua superficie.

I problemi che si possono anzitutto risolvere col metodo delle immagini appartengono alla categoria dei casi primo e secondo; potremo chiamarli i *problemi alterni.*

È poi quasi superfluo osservare che si possono dare anche problemi nei quali sopra parte della superficie del corpo sono date le condizioni del caso primo e sulle rimanenti quelle del secondo. Come ho già mostrato nella Nota citata, col metodo delle immagini possono in certi casi risolversi anche problemi di questa specie.

2. Il teorema che ho ricordato da principio può essere enunciato nel mode seguente [1]:

Se un corpo limitato dal piano $z=\delta$ ammette come piani di simmetria elastica i piani a questo paralleli, ed è in equilibrio quando in esso avviene la deformazione

$$u(x,y,z)\;,\;v(x,y,z)\;,\;w(x,y,z)$$
$$\mathrm{L}\;,\;\mathrm{M}\;,\;\mathrm{N}\;;$$

esso sarà pure in equilibrio per la deformazione

$$u(x,y,2\delta-z)\;,\;v(x,y,2\delta-z)\;,\;w(x,y,2\delta-z)$$
$$-\mathrm{L}\;,\;-\mathrm{M}\;,\;\mathrm{N}\;.$$

Indicheremo con $u', v', w', \mathrm{L}', \mathrm{M}', \mathrm{N}'$ questa seconda deformazione; avremo allora per $z=\delta$

$$u-u'=0\;,\;v-v'=0\;,\;w+w'=0 \tag{2}$$

$$\mathrm{L}+\mathrm{L}'=0\;,\;\mathrm{M}+\mathrm{M}'=0\;,\;\mathrm{N}-\mathrm{N}'=0 \tag{2'}$$

ed è chiaro che il processo che serve a passare dalla prima deformazione alla seconda, applicato a questa, riproduce la prima. Perciò le due deformazioni si possono dire ottenute l'una dall'altra per *riflessione* sul piano $z=\delta$.

Supponiamo ora che il piano limitante il corpo sia riferito ad una terna di assi ortogonali orientati in modo qualunque e indichiamo con α,β,γ i coseni di direzione della normale ad esso, diretta, se vuolsi, verso l'interno del corpo.

Indichiamo poi con λ,μ,ν i coseni di una direzione qualsiasi normale alla precedente; per cui sarà:

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0\,.$$

[1] Nella Nota citata il teorema è dimostrato nella ipotesi $\delta=0$; ma è assai facile constatare che questa limitazione non è necessaria.

È chiaro allora che le relazioni (2) si potranno scrivere nella forma seguente:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w &= \alpha u' - \beta v' - \gamma w' \\ \lambda u + \mu v + \nu w &= \lambda u' + \mu v' + \nu w' \end{aligned}$$

dove λ, μ, ν conservano il loro significato di coseni di una direzione *qualunque* normale ad α, β, γ.

Analogamente le relazioni (2') si possono scrivere

$$(3') \qquad \begin{aligned} \alpha L + \beta M + \gamma N &= \alpha L' + \beta M' + \gamma N' \\ \lambda L + \mu M + \nu N &= -\lambda L' - \mu M' - \nu N' \end{aligned}$$

E queste relazioni saranno verificate sul piano limite del corpo, la cui equazione sarà:

$$(4) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta .$$

Indichiamo con (X, Y, Z), (X', Y', Z') le coordinate di due punti simmetrici rispetto al piano parallelo al piano (4) e passante per l'origine, avente quindi per equazione

$$(5) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 .$$

Avremo

$$\frac{X - X'}{\alpha} = \frac{Y - Y'}{\beta} = \frac{Z - Z'}{\gamma}$$

e chiamando $2h$ il valore comune di questi rapporti

$$(6) \qquad \begin{gathered} X = X' + 2\alpha h \,,\quad Y = Y' + 2\beta h \,,\quad Z = Z' + 2\gamma h \\ h = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = -\alpha X' - \beta Y' - \gamma Z' \end{gathered}$$

Perciò, ricordando il significato di λ, μ, ν, possiamo scrivere

$$(7) \qquad \begin{aligned} \alpha(X + X') + \beta(Y + Y') + \gamma(Z + Z') &= 0 \\ \lambda(X - X') + \mu(Y - Y') + \nu(Z - Z') &= 0 \end{aligned}$$

e da queste due relazioni e dalla

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$$

eliminando λ, μ, ν ritroviamo le relazioni (6) che legano le coordinate dei due punti simmetrici considerati.

Similmente se invece del punto simmetrico (X', Y', Z') consideriamo il punto (X'', Y'', Z'') che si ottiene da (X', Y', Z') con un'inversione rispetto all'origine delle coordinate (e che per brevità diremo l'*antisimmetrico* del punto (X, Y, Z) rispetto al piano (5) ed all'origine) troviamo

$$\frac{X + X''}{\alpha} = \frac{Y + Y''}{\beta} = \frac{Z + Z''}{\gamma}$$

da cui

$$X = -X'' + 2\alpha h \,, \; Y = -Y'' + 2\beta h \,, \; Z = -Z'' + 2\gamma h$$
$$h = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = \alpha X'' + \beta Y'' + \gamma Z''$$

E invece dalle due relazioni (7) troviamo

$$(7') \quad \begin{aligned} \alpha(X - X'') + \beta(Y - Y'') + \gamma(Z - Z'') = 0 \\ \lambda(X + X'') + \mu(Y + Y'') + \nu(Z + Z'') = 0 \end{aligned}$$

da cui parimenti eliminando λ, μ, ν si ritrovano le relazioni che legano le coordinate di un punto a quelle del suo punto antisimmetrico.

Ora se confrontiamo le relazioni (7) (7′) colle (3) (3′) vediamo che esse sono rispettivamente della stessa forma. Possiamo quindi enunziare le proprietà precedentemente esposte riguardo a due sistemi di spostamenti ottenuti per riflessione sopra un piano, dicendo che *sopra questo piano esistono fra le componenti di spostamento le relazioni di simmetria e fra le componenti delle pressioni corrispondenti le relazioni dell'antisimmetria rispetto al piano parallelo passante per l'origine.*

Vediamo ora come si possano rappresentare in generale gli spostamenti riflessi in funzione degli spostamenti dati $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$.

Poniamo

$$u_1 = u(x', y', z') \,, \; v_1 = v(x', y', z') \,, \; w_1 = w(x', y', z')$$

dove con x', y', z' intendiamo le coordinate del punto simmetrico di x, y, z rispetto al piano (4), cioè

$$x' = x - 2\alpha s \,, \; y' = y - 2\beta s \,, \; z' = z - 2\gamma s$$
$$s = \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta \,.$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} u' &= u_1 - 2\alpha(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) \\ v' &= v_1 - 2\beta(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) \\ w' &= w_1 - 2\gamma(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) \end{aligned}$$

e queste sono le formole cercate, dalle quali reciprocamente si possono immediatamente ricavare le relazioni (3) valide per $s = 0$.

Dalle (3′) poi risulta che le relazioni che esistono fra le componenti delle pressioni sul piano $s = 0$, si possono porre sotto la forma

$$\begin{aligned} L' &= -L + 2\alpha(\alpha L + \beta M + \gamma N) \\ M' &= -M + 2\beta(\alpha L + \beta M + \gamma N) \\ N' &= -N + 2\gamma(\alpha L + \beta M + \gamma N) \,. \end{aligned}$$

3. Richiamate così sotto forma più generale le proprietà che già avevo dimostrate nella Nota più volte citata, possiamo proporci di cercarne le ap-

plicazioni alla risoluzione di problemi d'equilibrio per corpi limitati da piani. I risultati già ottenuti ed esposti nella Nota indicata e la teoria delle divisioni regolari dello spazio ci permettono di prevedere facilmente i risultati, a cui si arriva. Difatti i campi, pei quali risultava risoluto il problema statico, erano campi appartenenti a casi speciali di divisioni regolari dello spazio, mediante piani.

È quindi naturale di cominciare a considerare il caso di un campo qualsiasi appartenente ad una divisione regolare dello spazio mediante piani passanti per un punto. In seguito si potranno poi considerare anche divisioni dello spazio mediante piani qualsiasi [1].

Supponiamo dunque di avere un *gruppo simmetrico* di n piani di una stella, tali cioè che costruendo per riflessione le immagini di $n-1$ piani del gruppo rispetto al rimanente, il sistema rientri sempre in sè stesso. Come è noto tali sistemi si ottengono considerando i piani di simmetria dei poliedri regolari e dànno le divisioni regolari di una superficie sferica, che abbia il centro nel centro della stella, cioè dividono la superficie stessa in poligoni congruenti o simmetrici. Lo spazio risulta parimenti diviso in un certo numero di angoli solidi uguali o simmetrici. Noi ci proporremo di studiare col metodo delle immagini la deformazione di uno degli angoli solidi così determinati, supponendo che sia costituito da materia isotropa od avente per piani di simmetria i piani stessi del gruppo.

Scelto ad arbitrio nell'interno di uno di questi angoli solidi Ω_1 un punto M_1, costruiamone le immagini rispetto a tutti i piani del gruppo, e così procediamo poi rispetto a ciascuna di queste immagini. Otterremo un gruppo finito di un numero pari di punti che indicheremo con $2m$. Supponiamo di aver costruito successivamente in un certo ordine tutte queste immagini partendo da M_1. Ciascuno degli angoli solidi, considerato insieme al punto che in esso si trova, costituisce una figura congruente o simmetrica alla primitiva che indicheremo con $\Omega_1(M_1)$; sarà uguale se ottenuta con un numero pari di riflessioni, simmetrica nel caso opposto.

Perciò indicando con numeri $1, 2, \ldots 2m$ le successive riflessioni nell'ordine indicato, saranno

$$\Omega_1(M_1)\ ,\ \Omega_3(M_3)\ ,\ \ldots\ \Omega_{2m-1}(M_{2m-1})\ ,$$

angoli solidi congruenti, e

$$\Omega_2(M_2)\ ,\ \Omega_4(M_4)\ ,\ \ldots\ \Omega_{2m}(M_{2m})$$

angoli solidi simmetrici.

Siano ora

$$u_1 = u(x, y, z)\ ,\ v_1 = v(x, y, z)\ ,\ w_1 = w(x, y, z)$$

[1] Circa la teoria generale delle divisioni regolari dello spazio cfr. Schöflies, *Krystallsysteme und Krystallstructur*; Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*.

le componenti di spostamento relative ad una deformazione elastica dell'angolo solido Ω_1, vale a dire una terna di integrali delle equazioni d'equilibrio dati nello spazio Ω_1. Noi potremo costruire altre $2m-1$ terne di integrali partendo dalla terna data con riflessioni successive sui piani del gruppo, corrispondenti cioè alle $2m-1$ riflessioni colle quali si genera il gruppo dei punti $M_1, M_2, \ldots M_{2m}$ partendo dal punto M_1.

Ciascuna di queste terne soddisferà alle equazioni di equilibrio al pari della prima, se, come abbiamo supposto, i piani del gruppo sono piani di simmetria elastica per la sostanza di cui il corpo è composto, ed il loro insieme costituirà un *gruppo di integrali* delle equazioni di equilibrio, gruppo che possiamo considerare come *olomorfo* al gruppo dei punti M.

Noi indicheremo con u_i, v_i, w_i il sistema di spostamenti ottenuto mediante la riflessione che genera il punto M_i; e sommando insieme gli spostamenti corrispondenti alle riflessioni di ordine pari e quelli corrispondenti alle riflessioni di ordine dispari, potremo costruire i due sistemi di spostamenti

$$
\begin{aligned}
&U' = \sum_{i=1}^{m} u_{2i}\ , \quad U'' = \sum_{i=1}^{m} u_{2i-1}\\
(12)\qquad &V' = \sum_{i=1}^{m} v_{2i}\ , \quad V'' = \sum_{i=1}^{m} v_{2i-1}\\
&W' = \sum_{i=1}^{m} w_{2i}\ , \quad W'' = \sum_{i=1}^{m} w_{2i-1}
\end{aligned}
$$

che daranno nuovi integrali delle equazioni di equilibrio nello spazio Ω_1.

Ora un piano del gruppo è piano di simmetria per il gruppo dei $2m$ punti M; in particolare quindi lo sono i piani che limitano l'angolo solido Ω_1. Se costruiamo del gruppo dei punti dispari

$$M_1\ ,\ M_3\ ,\ \ldots\ M_{2m-1}$$

le immagini rispetto ad uno qualsiasi dei piani del gruppo, otterremo sempre in un certo ordine il gruppo dei punti pari

$$M_2\ ,\ M_4\ ,\ \ldots\ M_{2m}.$$

Lo stesso deve avvenire per le nostre terne di integrali; perciò gli spostamenti

$$U', V', W' \quad , \quad U'', V'', W''$$

definiti dalle relazioni precedenti si potranno considerare come *due sistemi di spostamenti ottenuti l'uno dall'altro per riflessione sopra uno qualsiasi dei piani del gruppo.*

Indichiamo con $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ ,\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ ,\ \ldots$ i coseni di direzione delle normali alle faccie dell'angolo solido Ω_1 e con $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1\ ,\ \lambda_2\ \mu_2\ \nu_2\ ,\ \ldots$ i coseni di una direzione qualsiansi giacente nelle faccie stesse. Per il teorema fondamentale dimostrato, avremo che sopra una faccia σ_i qualsiasi di Ω_1 saranno verificate le relazioni

$$\alpha_i(U' + U'') + \beta_i(V' + V'') + \gamma_i(W' + W'') = 0$$
$$\lambda_i(U' + U'') + \mu_i(V' - V'') + \nu_i(W' - W'') = 0 .$$

E analogamente considerando le componenti L', M', N', e L'', M'', N'' delle pressioni superficiali che mantengono l' equilibrio quando avvengono nello spazio Ω_1 rispettivamente le due deformazioni rappresentate dalle (12), avremo che sopra una faccia σ_i qualsiasi di Ω_1 risulteranno verificate le relazioni

$$\alpha_i(L' - L'') + \beta_i(M' - M'') + \gamma_i(N' - N'') = 0$$
$$\lambda_i(L' + L'') + \mu_i(M' + M'') + \gamma_i(N' + N'') = 0 .$$

Da queste relazioni risulta che *la deformazione*

$$U_1 = U' + U'' \;,\; V_1 = V' + V'' \;,\; W_1 = W' + W''$$

avrà su tutta la superficie di Ω_1 nulla la componente normale di spostamento e la componente tangenziale di pressione.

Reciprocamente *la deformazione*

$$U_2 = U' - U'' ,\; V_2 = V' - V'' ,\; W_2 = W' - W''$$

avrà su tutta la superficie di Ω_1 nulla la componente tangenziale di spostamento e la normale di pressione.

L'applicazione di questi risultati alla risoluzione dei problemi alterni d'equilibrio dell'angolo solido Ω_1 si fa in modo analogo a quello che ho indicato nel caso dello spazio limitato da un piano e nel caso del diedro e del triedro rettangoli. Però prima di trattare di queste applicazioni, gioverà formarci un'idea più completa della natura delle soluzioni che abbiamo potuto costruire mediante le considerazioni precedenti.

4. Supponiamo dato in tutto lo spazio un campo vettoriale qualsiasi, le cui componenti nel punto (x, y, z) siano

$$u_1 = u(x, y, z) \;,\; v_1 = v(x, y, z) \;,\; w_1 = w(x, y, z)$$

e consideriamo il campo riflesso, rispetto al piano $z = 0$,

$$u_2 = u(x, y, -z) \;,\; v_2 = v(x, y, -z) \;,\; w_2 = - w(x, y, -z)$$

che potremo parimenti supporre dato in tutto lo spazio. Colla composizione di questi due, noi possiamo costruire i due nuovi campi

$$U' = u_1 + u_2 \ , \ V' = v_1 + v_2 \ , \ W' = w_1 + w_2$$
$$U'' = u_1 - u_2 \ , \ V'' = v_1 - v_2 \ , \ W'' = w_1 - w_2$$

nei quali i vettori corrispondenti a due punti simmetrici rispetto al piano $z = 0$ hanno fra loro relazioni assai semplici. Di fatti, cambiando z in $-z$ in U', V', W' restano inalterate U', V' mentre W' cambia di segno. Perciò, se noi immaginiamo costruito in ogni punto dello spazio il vettore che gli appartiene, coll'origine nel punto stesso, avremo che, nei punti simmetrici rispetto al piano $z = 0$, i vettori (U', V', W') saranno simmetrici l'uno dell'altro rispetto allo stesso piano. Il campo si potrà dire *un campo vettoriale simmetrico* rispetto al piano $z = 0$.

Se invece cambiamo z in $-z$ nelle U'', V'', W'' cambiano di segno U'', V'', resta immutata W''. Il vettore nel punto simmetrico si otterrà invertendo il senso del vettore che si aveva nel caso precedente. Un tal vettore si potrà chiamare *antisimmetrico* del vettore corrispondente al punto (x, y, z) rispetto al piano $z = 0$, ed il campo (U'', V'', W'') si dirà *un campo vettoriale antisimmetrico* rispetto al piano medesimo.

È chiaro poi che, per ragioni di simmetria e come risulta dalle formole precedenti, in un campo simmetrico il vettore nei punti del piano di simmetria dovrà essere diretto parallelamente al piano stesso, e dovrà invece essere normale al piano in un campo antisimmetrico.

Gli integrali che noi abbiamo dapprima considerato per le equazioni dell'equilibrio elastico possono appunto considerarsi come rappresentanti campi vettoriali aventi un piano di *simmetria* o di *antisimmetria*, in cui il vettore è dato dallo spostamento.

Considerando poi dei gruppi più complessi di integrali, come abbiamo visto, si possono costruire mediante somme o differenze degli integrali del gruppo, dei nuovi integrali i quali hanno per piani di simmetria o di antisimmetria i piani di un gruppo simmetrico di piani.

I campi vettoriali corrispondenti hanno quindi come piani di simmetria o di antisimmetria tutti i piani del gruppo. Noi li diremo *simmetrici od antisimmetrici rispetto al gruppo di questi piani.*

In ciascuno di tali piani il vettore giace nel piano stesso nel caso della simmetria ed è invece normale nel caso dell' antisimmetria. Sono queste appunto le proprietà che stanno a base della applicazione di questi campi alla integrazione delle equazioni d'equilibrio.

Per dare un'idea più completa della distribuzione dei vettori aggiungiamo due figure, nella prima delle quali abbiamo rappresentata la posizione del vettore nei sei punti di un gruppo determinato da tre piani di simmetria passanti per una retta ed inclinati fra loro di 120°, quando il campo è simmetrico.

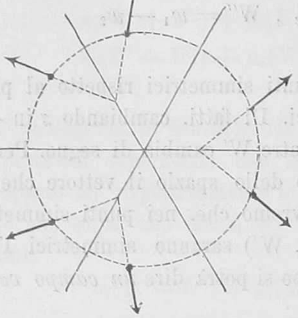

FIG. 1.

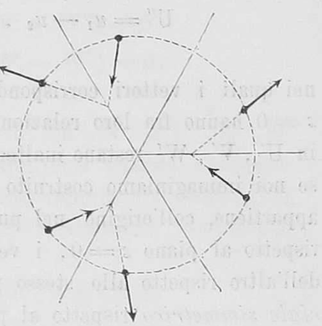

FIG. 2.

Nella seconda abbiamo invece la posizione del vettore nei sei punti stessi quando il campo è antisimmetrico. Per semplicità il vettore è supposto normale all'asse dei tre piani.

5. Per ottenere la risoluzione dei problemi alterni di equilibrio relativi ai campi Ω_1 basta ricorrere alle formole rappresentative, analoghe a quella di Green, che si possono stabilire per le componenti dello spostamento elastico ed al metodo d'integrazione che immediatamente ne deriva. Ciò torna lo stesso, che prendere come spostamenti ausiliari nel procedimento che serve a stabilire quelle formole degli integrali che abbiano un punto isolato di infinito di 1° ordine in Ω_1, ed inoltre siano simmetrici od antisimmetrici rispetto al gruppo dei piani che determinano Ω_1.

Nel caso della isotropia si potranno considerare dapprima gli integrali

$$
\begin{aligned}
& u_1 = (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2\omega^2}{r} \\
(13) \qquad & v_1 = (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \\
& w_1 = (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z}
\end{aligned}
$$

(Ω, ω essendo le due costanti elastiche del corpo) e costruire col procedimento indicato al n. 3 il gruppo degli integrali corrispondenti al gruppo dei piani dati. Gli integrali che abbiamo indicato con U_1, V_1, W_1 si potranno allora scrivere sotto la forma

$$U_1 = u_1 + U \,, \quad V_1 = v_1 + V \,, \quad W_1 = w_1 + W$$

dove U, V, W rappresentano integrali uniformi nello spazio Ω_1. La formola che serve a rappresentare la componente u in una deformazione a cui corrispondano le pressioni superficiali L, M, N, sarà allora

$$(14) \qquad 8\pi\omega^2 \Omega^2 u(a, b, c) =$$

$$= \int_\sigma [(LU_1 - L_1 u) + (MV_1 - M_1 v) + (NW_1 - N_1 w)]\, d\sigma$$

ove σ rappresenta il complesso delle faccie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ di Ω_1 e si ammette naturalmente che la deformazione sia tale che gli integrali del secondo membro conservino un significato ad onta dell' estensione infinita dei campi d'integrazione. Con L_1, M_1, N_1 abbiamo indicato le componenti della pressione esterna corrispondente agli spostamenti U_1, V_1, W_1.

Ora indichiamo con $s_{n_i}, s_{t_i}, s_{t'_i}$, le componenti dello spostamento (u, v, w) secondo la normale alla faccia σ_i e secondo due sezioni tangenziali comunque fissate; e analogamente con $P_{n_i}, P_{t_i}, P_{t'_i}$, le componenti secondo le stesse direzioni della pressione (L, M, N). Le componenti analoghe per la deformazione (U_1, V_1, W_1) le indicheremo con un indice (1) in alto. Avremo allora per la somma che comparisce sotto l'integrale del secondo membro della (15) relativa alla faccia σ:

$$[\Sigma(LU_1 - L_1 u)] = P_{n_i} s^{(1)}_{n_i} - P^{(1)}_{n_i} s_{n_i} + P_{t_i} s^{(1)}_{t_i} - P^{(1)}_{t_i} s_{t_i} + P_{t'_i} \overset{(1)}{s_{t'_i}} - \overset{(1)}{P_{t'_i}} s_{t'_i}.$$

Ma, per quanto sappiamo, sulle faccie σ_i sono verificate le relazioni

$$s^{(1)}_{n_i} = 0 \ , \quad P^{(1)}_{t_i} = 0 \ , \quad P^{(1)}_{t'_i} = 0 .$$

Perciò la (14) diverrà

$$8\pi\omega^2 \Omega^2 u(a, b, c) = \sum_i \int_{\sigma_i} \left(P_{t_i} \overset{(1)}{s_{t_i}} + P_{t'_i} \overset{(1)}{s_{t'_i}} - \overset{(1)}{P_{n_i}} s_{n_i}\right) d\sigma_i .$$

Questa formola determina la componente u di spostamento del problema primo alterno relativo allo spazio Ω_1, quando cioè alla superficie sono note s_n e P'_t, P_t.

In modo analogo si determinerebbero le altre due componenti v, w partendo, anzichè dagli integrali (13), da quelli che se ne ottengono con sostituzioni circolari sulle x, y, z, u, v, w.

E similmente si risolverebbe il secondo problema alterno prendendo invece degli integrali U_1, V_1, W_1 quelli che abbiamo indicato con U_2, V_2, W_2 ed applicando un procedimento analogo. Si troverebbe così per la componente di spostamento secondo l'asse delle x, la espressione

$$8\pi\omega^2 \Omega^2 u(a, b, c) = \sum_i \int_{\sigma_i} \left(\mathrm{P}_{n_i} \overset{(2)}{s}_{n_i} - \overset{(2)}{\mathrm{P}}_{t_i} s_{t_i} - \overset{(2)}{\mathrm{P}}_{t'_i} s_{t'_i} \right) d\sigma_i ;$$

e formole simili per le altre due componenti.

6. Gioverà infine richiamare dalla teoria delle divisioni regolari della superficie sferica quali siano i casi in cui le considerazioni precedenti sono applicabili. Indicheremo senz'altro quali sieno i campi Ω_1 corrispondenti:

1.° *Diedri* determinati da due piani inclinati secondo un angolo $\frac{\pi}{n}$, ove $n \geq 2$. Il gruppo degli integrali ausiliari è formato da $2n$ terne.

2.° *Triedri* ottenuti tagliando i diedri precedenti con un piano normale allo spigolo.

Questi triedri hanno gli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}$, ed il gruppo degli integrali è composto di $4n$ terne.

3.° *Triedri* formati coi piani di simmetria del tetraedro, ottaedro e icosaedro regolari.

Questi triedri hanno rispettivamente gli angoli

$$(a) \qquad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3}$$

$$(b) \qquad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{4}$$

$$(c) \qquad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{5}.$$

I gruppi corrispondenti sono formati di 24, 48, 120 terne di integrali.

Nel caso del diedro e del triedro rettangolo il metodo d' integrazione sviluppato conduce anche alla soluzione dei problemi alterni, in cui sopra alcune delle faccie sono dati gli elementi del problema primo, e sulle rimanenti quelli del secondo, come già ho notato altrove.

È chiaro poi che l' applicazione del metodo si potrà estendere anche alle divisioni regolari dello spazio a tre dimensioni, che portano anche a campi finiti, come il parallelepipedo rettangolo od il prisma retto a base triangolare. In questi casi però converrà assicurarsi della convergenza delle serie che si ottengono con gruppi composti di infiniti integrali.

In un'altra Nota mi occuperò della costruzione effettiva dei gruppi di integrali ausiliari, di cui ho fatto uso. Il procedimento a tal uopo indicato alla fine del n. 2 è valido in generale, ma conduce a formole troppo complesse per poter essere direttamente applicato.