ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

suo gruppo di monodromia, contenendo una trasposizione, è il gruppo totale, oppure è imprimitivo (¹). In quest'ultimo caso gli n punti di un gruppo generico G_n della g'_n si possono dividere in un certo numero r di sple G_s $(nr = s)$, ed i G_s formano sopra C un'involuzione g'_s o γ'_s (razionale o nò). In altri termini la g'_n risulta *composta* con un'involuzione d'ordine inferiore. Ciò viene appunto affermato dal primo dei nostri teoremi. Il quale racchiude come caso particolare il citato teorema di Kneser « se sopra una *qualsiasi* curva irriducibile $f(xy) = 0$, si costruisce la funzione razionale $ax + by = t$, corrispondente a due valori generici di a, b, il gruppo di monodromia della funzione algebrica $x(t)$ è *sempre* il gruppo totale ».

Infatti la g'_n segnata sulla nostra curva della funzione razionale t, essendo contenuta come g'_n generica nella g^2_n (semplice) segata dalle rette del piano, non può essere composta con un'involuzione d'ordine $< n$; e d'altra parte i punti di coincidenza di essa, che sono i punti di contatto delle tangenti condotte alla curva da un punto generico del piano, sono fra loro distinti.

Fisica matematica. — *Flusso di energia e radiazione nel campo elettromagnetico generato dalla convezione elettrica.* Nota di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra (²).

1. Si consideri una carica elettrica mobile comunque in un dielettrico indefinito impolarizzabile ed in quiete, ed il campo elettromagnetico da essa generato.

Valendosi dei potenziali ritardati, il prof. Levi-Civita ha dato (³) un metodo generale che permette la determinazione del campo così prodotto.

Siano $0\,x\,y\,z$ un sistema di assi fissi aventi l'origine nella posizione iniziale della carica mobile Ω; le coordinate di Ω essendo $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, sia r la distanza del punto generico considerato da quel punto Ω', che è la posizione occupata nell'istante $t - \mathrm{A}r$ dalla carica che occupa nell'istante t la posizione Ω, e v la velocità della carica nella posizione Ω'. Essendo allora

$$r^2 = (x - \overline{\varphi})^2 + (y - \overline{\psi})^2 + (z - \overline{\chi})^2, \tag{1}$$

(il tratto sovrapposto indicando per una funzione qualunque il mutamento di t in $t - \mathrm{A}r$) e le componenti della velocità della carica in Ω' essendo

(¹) Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni*, Pisa, Spoerri, 1900, (pag. 28).

(²) Presentata nella seduta del 10 aprile 1904.

(³) *Sur le champ électromagnétique* ecc., Annales de la Faculté des Sciences. Toulouse, 2 série, t. IV, 1902.

$\frac{\overline{d\varphi}}{dt}$, $\frac{\overline{d\psi}}{dt}$, $\frac{\overline{d\chi}}{dt}$, si sa che i potenziali ritardati elettrostatico e vettore hanno le espressioni seguenti

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{F} = \frac{m}{r[1-\mathrm{A}v\cos vr]} = \frac{m}{r - \mathrm{A}\left[(x-\overline{\varphi})\frac{\overline{d\varphi}}{dt} + (y-\overline{\psi})\frac{\overline{d\psi}}{dt} + (z-\overline{\chi})\frac{\overline{d\chi}}{dt}\right]},\\
&\mathrm{U} = \mathrm{A}\frac{\overline{d\varphi}}{dt}\cdot \mathrm{F} \qquad \mathrm{V} = \mathrm{A}\frac{\overline{d\psi}}{dt}\cdot \mathrm{F}\,, \qquad \mathrm{W} = \mathrm{A}\frac{\overline{d\chi}}{dt}\cdot \mathrm{F},
\end{aligned}
\right.
$$

in cui m è la carica ed A l'inversa della velocità della luce. Questi potenziali ritardati soddisfanno all'equazione

$$\Box f = \Delta_2 f - \mathrm{A}^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = 0\,,$$

e sono legati fra loro dall'altra

$$\mathrm{A}\frac{d\mathrm{F}}{dt} + \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz} = 0.$$

Le componenti delle forze elettromagnetiche del campo generato dalla carica sono quindi, riferendoci agli assi fissi, le seguenti:

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= -\frac{d\mathrm{F}}{dx} - \mathrm{A}\frac{d\mathrm{U}}{dt}\,,\\
\mathrm{Y} &= -\frac{d\mathrm{F}}{dy} - \mathrm{A}\frac{d\mathrm{V}}{dt}\,,\\
\mathrm{Z} &= -\frac{d\mathrm{F}}{dz} - \mathrm{A}\frac{d\mathrm{W}}{dt}\,,
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \frac{d\mathrm{V}}{dz} - \frac{d\mathrm{W}}{dy}\,,\\
\mathrm{M} &= \frac{d\mathrm{W}}{dx} - \frac{d\mathrm{U}}{dz}\,,\\
\mathrm{N} &= \frac{d\mathrm{U}}{dy} - \frac{d\mathrm{V}}{dx}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Esse sono soluzioni dei sistemi

$$
(\mathrm{I})\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{A}\frac{d\mathrm{X}}{dt} &= \frac{d\mathrm{M}}{dz} - \frac{d\mathrm{N}}{dy}\,,\\
\mathrm{A}\frac{d\mathrm{Y}}{dt} &= \frac{d\mathrm{N}}{dx} - \frac{d\mathrm{L}}{dz}\,,\\
\mathrm{A}\frac{d\mathrm{Z}}{dt} &= \frac{d\mathrm{L}}{dy} - \frac{d\mathrm{M}}{dx}\,,
\end{aligned}
\right.
\qquad
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{A}\frac{d\mathrm{L}}{dt} &= \frac{d\mathrm{Z}}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}}{dz}\\
\mathrm{A}\frac{d\mathrm{M}}{dt} &= \frac{d\mathrm{X}}{dz} - \frac{d\mathrm{Z}}{dx}\\
\mathrm{A}\frac{d\mathrm{N}}{dt} &= \frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{d\mathrm{X}}{dy}
\end{aligned}
\right.
$$

e delle due

$$(\mathrm{III})\quad \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = 0\,, \qquad (\mathrm{IV})\quad \frac{d\mathrm{L}}{dx} + \frac{d\mathrm{M}}{dy} + \frac{d\mathrm{N}}{dz} = 0\,,$$

aventi una singolarità (variabile con t) nel punto occupato dalla carica, e nulle all'infinito, in generale, solo come $\frac{1}{r}$ [1]. Questo modo di comportarsi all'infinito delle forze elettromagnetiche risulta senz'altro dalle loro espressioni esplicite che si ricavano dalle (3), tenendo conto delle (2) e della (1). Ma anche senza ricorrere alle loro esplicite espressioni si può facilmente riconoscere che in generale l'annullarsi delle forze all'infinito come $\frac{1}{r^2}$ sarebbe fisicamente inattendibile.

Infatti si sa [2] che il flusso di energia nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie è uguale al prodotto delle due forze elettrica e magnetica per il seno dell'angolo da esse compreso e per il fattore $\frac{1}{4\pi A}$; cioè è dato da

$$\frac{1}{4\pi A}\{(NY - MZ)\cos nx + (LZ - NX)\cos ny + (MX - LY)\cos nz\} ;$$

quindi, integrando ad una sfera σ infinitamente grande, il flusso di energia del campo elettromagnetico che si disperde all'infinito nell'unità di tempo, e che indichiamo con E, sarà

$$E = \frac{1}{4\pi A}\int_\sigma \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ L & M & N \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma, \tag{4}$$

essendo $\alpha\,\beta\,\gamma$ i coseni della normale alla superficie σ diretti verso l'interno.

Ora se le forze si annullassero all'infinito di secondo ordine si avrebbe un flusso nullo, ciò che non sarebbe ragionevole. Infatti quando al sistema (carica o cariche mobili ed etere ambiente) non si comunica altra forma di energia, come avviene nel caso del moto traslatorio uniforme, è naturale che il flusso sia nullo: ciò che avviene, le forze annullandosi allora all'infinito di secondo ordine. Ma è anche naturale che questo non avvenga quando bisogna somministrare continuamente energia per mantenere il movimento. In questo caso l'energia somministrata sotto forma cinetica al sistema viene da esso restituita sotto forma di flusso a distanza infinita. È facile poter calcolare mediante la (4) il flusso di energia che nell'unità di tempo si disperde all'infinito: per questo basta tener conto nelle espressioni esplicite

[1] Nella Nota: *Campo elettromagnetico generato da una carica in moto circolare uniforme*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, fasc. 2°, 1° sem. 1903, mi è sfuggita l'inesatta asserzione che le forze all'infinito si annullano come $\frac{1}{r^2}$.

[2] Vedi per es. Hertz: *Sull'equazioni fondamentali* ecc., traduzione italiana. Nuovo Cimento, 1890.

delle forze elettromagnetiche solo delle parti che si annullano all'infinito di primo ordine, il resto essendo trascurabile; e, fatta la sostituzione nella (4), effettuare l'integrazione estesa ad una sfera infinitamente grande.

Perciò si consideri il campo in un tempo t, nel quale istante la carica sia nel punto Ω di coordinate $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$; prendiamo, per semplificare i calcoli, una sfera di raggio r grandissimo col centro nel punto Ω', che è la posizione occupata dalla carica nel tempo $t - \mathrm{A}r$.

Assumiamo inoltre l'asse z diretto secondo la velocità v della carica in Ω', onde avremo per le componenti di questa velocità

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\overline{\psi}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\overline{\chi}}{dt} = v. \tag{5}$$

In generale dalle (3) si ricavano, mediante le (2) ed (1), le espressioni esplicite delle forze elettromagnetiche; allora tenendo conto delle (5), e riferendoci ad un sistema di assi $x_1\, y_1\, z_1$ coll'origine in Ω' e paralleli agli assi $x\, y\, z$, si ottengono per le parti delle forze che si annullano all'infinito di primo ordine, e che indichiamo con (X) (Y) . . . (N), le seguenti espressioni relative ai punti della superficie sferica considerata:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
(\mathrm{X}) &= \frac{m\,\mathrm{A}^2 a}{r(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2}\left\{\frac{\alpha\cos a\,r}{1-\mathrm{A}\,v\,\mathrm{cas}\,\theta} - \cos a\,x_1\right\},\\
(\mathrm{Y}) &= \frac{m\,\mathrm{A}^2 a}{r(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2}\left\{\frac{\beta\cos a\,r}{1-\mathrm{A}\,v\cos\theta} - \cos a\,y_1\right\},\\
(\mathrm{Z}) &= \frac{m\,\mathrm{A}^2 a}{r(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2}\left\{\frac{\gamma\cos a\,r}{1-\mathrm{A}\,v\cos\theta} - \frac{\mathrm{A}\,v\cos a\,r}{1-\mathrm{A}\,v\cos\theta} - \cos a\,z_1\right\},\\
(\mathrm{L}) &= \frac{m\,\mathrm{A}^2 a}{r(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2}\left\{\beta\cos a\,z_1 - \gamma\cos a\,y_1 + \frac{\mathrm{A}\,v\,\beta\cos a\,r}{1-\mathrm{A}\,v\cos\theta}\right\},\\
(\mathrm{M}) &= \frac{m\,\mathrm{A}^2 a}{r(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2}\left\{\gamma\cos a\,x_1 - \alpha\cos a\,z_1 - \frac{\mathrm{A}\,v\,\alpha\cos a\,r}{1-\mathrm{A}\,v\cos\theta}\right\},\\
(\mathrm{N}) &= \frac{m\,\mathrm{A}^2 a}{r(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2}\left\{\alpha\cos a\,y_1 - \beta\cos a\,x_1\right\}.
\end{aligned}\right.$$

In esse a indica l'accelerazione della carica nella posizione Ω', collegata alla posizione Ω della carica relativa al tempo t nel modo detto, α, β, γ sono i coseni di r, θ la colatitudine relativa all'asse z_1, le altre quantità avendo il significato attribuitogli precedentemente.

Sostituendo nella (4) le espressioni (6) si ha:

$$(7)\quad \mathrm{E} = -\frac{m^2\mathrm{A}^4 a^2}{4\pi\mathrm{A}}\int_\sigma \frac{[(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^2 + 2\,\mathrm{A}\,v(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)\cos a\,r\cos a\,z_1 - (1-\mathrm{A}^2v^2)\cos^2 a\,r]\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi}{(1-\mathrm{A}\,v\cos\theta)^6},$$

ed integrando rispetto a φ, ricordando che è

$$\cos ar = \alpha \cos ax_1 + \beta \cos ay_1 + \gamma \cos az_1 ,$$

$$\alpha = \operatorname{sen} \theta \cos \psi \quad , \quad \beta = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad \gamma = \cos \theta ,$$

si ottiene

$$E = -\frac{m^2 A^3 a^2}{4} \int_0^\pi \frac{\{2 \operatorname{sen}^2 \theta + [2(1+A^2 v^2) \cos^2 \theta - (1 - A^2 v^2) \operatorname{sen}^2 \theta - 4 A v \cos \theta] \operatorname{sen}^2 a z_1\} \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{(1 - A v \cos \theta)^6}$$

e quindi finalmente

$$(7)' \qquad E = -m^2 A^3 a^2 \left\{ \frac{2(A^2 v^2 + 5)}{15(1 - A^2 v^2)^4} + \frac{4 A^2 v^2 (A^4 v^4 + A^2 v^2 - 2) \operatorname{sen}^2 a z_1}{15(1 - A^2 v^2)^5} \right\} .$$

Come si prevedeva il flusso di energia disperso all' infinito è nullo nel caso in cui il moto della carica è rettilineo uniforme; quando poi sia $A v$ (rapporto fra la velocità della carica nel punto Ω' e quella della luce) un numero così piccolo che di esso si possano trascurare le potenze superiori alla prima, il flusso si riduce a

$$E = -\frac{2}{3} m^2 A^3 a^2 ,$$

quindi diviene trascurabile se anche $A^3 a^2$ è almeno dello stesso ordine di grandezza di $A^2 v^2$. Si verifica questo, per es., se la carica ha un moto circolare uniforme, nel qual caso essendo $a = \frac{v^2}{R}$ (R raggio della circonferenza descritta dalla carica) il flusso è trascurabile, come è naturale che sia visto che con questo ordine di approssimazione le forze si annullano all' infinito di secondo ordine [1].

Immaginiamo ora che la sfera di raggio r grandissimo, ed il cui centro Ω' è collegato alla carica nel modo sopradetto, venga trascinata dalla carica nel suo movimento, e determiniamo il flusso di energia che attraverso a questa superficie sferica si disperde all' infinito, e che chiameremo radiazione. Quando l'elemento superficiale sferico si riguarda fisso, come nel caso prima considerato, il flusso attraverso l' unità di superficie è dato da

$$\frac{1}{4\pi} \{(NY - MZ) \cos nx + (LZ - NX) \cos ny + (MX - LY) \cos nz\} \cdot \lambda ,$$

essendo $\lambda = \frac{1}{A}$ la velocità della luce nell'etere. Quando invece l'elemento superficiale è in movimento, per l'analogia idrodinamica che regola il con-

[1] Vedi Nota cit., Rend. R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1903, pag. 47.

cetto di flusso, sarà il flusso attraverso l'unità di superficie dato da

$$\frac{1}{4\pi}\{(NY - MZ)\cos nx + (LZ - NX)\cos ny + (MX - LY)\cos nz\}\cdot(\lambda - \mu),$$

essendo μ la velocità dell'elemento superficiale secondo la normale all'elemento stesso.

Riferiamoci a tutte le notazioni precedentemente adottate; al tempo t la sfera ha il centro nel punto Ω' di cui la velocità è v; quindi, essendo l'asse z_1 diretto secondo la velocità v di Ω', per ogni elemento superficiale la velocità secondo la normale è $\mu = v\cos\theta$, essendo θ la colatitudine relativa all'asse z_1; allora il flusso per unità di superficie è:

$$\frac{1}{4\pi A}\{(NY - MZ)\cos nx_1 + \cdots\}(1 - Av\cos\theta).$$

La radiazione E' al tempo t viene perciò ad essere

$$(8)\qquad E' = \frac{1}{4\pi A}\int_\sigma \{(NY - MZ)\cos nx_1 + \cdots\}(1 - Av\cos\theta)\,d\sigma,$$

da cui in modo analogo al precedente

$$E' = -\frac{m^2A^3a^2}{4}\int_0^\pi \frac{\{2\operatorname{sen}^2\theta + [2(1+A^2v^2)\cos^2\theta - (1-A^2v^2)\operatorname{sen}^2\theta - 4Av\cos\theta]\operatorname{sen}^2 az_1\}\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{(1 - Av\cos\theta)^5},$$

ossia anche

$$(9)\qquad E' = -\frac{2}{3}\frac{m^2A^3a^2(1 - A^2v^2\operatorname{sen}^2 az_1)}{(1 - A^2v^2)^3} = -\frac{2}{3}\frac{m^2a^2\lambda(\lambda^2 - v^2\operatorname{sen}^2 az_1)}{(\lambda^2 - v^2)^3}.$$

A questa stessa espressione per l'energia radiata nel caso di una carica in moto qualunque giunge anche il prof. A. W. Conway [1].

2. Allo scopo di chiarire un principio di cui mi sono implicitamente servito in un precedente studio riprendiamo a considerare il problema generale dell'induzione elettrodinamica, e consideriamo una carica in moto piano qualunque.

Si introduca nel campo un piano conduttore parallelamente al quale si muova la carica; su di esso si origina allora una variabile distribuzione di elettricità indotta, cui corrisponde un potenziale elettrostatico ed un poten-

[1] Vedi: *The Field of Force due to a moving Electron*, Procedings of The London Mathematical Society, series 2, vol. I, pag. 163. In questo lavoro l'Autore determina il campo elettromagnetico generato da cariche mobili, problema precedentemente risoluto dal prof. Levi-Civita. Vedi mem. cit. degli Annales de Toulouse.

ziale vettore. Preso questo piano per piano $z = 0$, siano F_1 il potenziale elettrostatico indotto ed $(U_1, V_1, W_1 = 0)$ le componenti del potenziale vettore. Le componenti delle forze elettromagnetiche inducenti sono date dalle (3), in cui si faccia $W = 0$; come pure le stesse formole danno le forze indotte, quando vi si sostituiscano i potenziali indotti. Se si indicano con e_1, u_1, v_1 la densità di distribuzione e le componenti della corrente indotta si sa che

$$(10) \qquad F_1 = \int_\sigma \frac{\overline{e}_1}{r}\, d\sigma \ , \quad U_1 = A \int_\sigma \frac{\overline{u}_1}{r}\, d\sigma \ , \quad V_1 = A \int_\sigma \frac{\overline{v}_1}{r}\, d\sigma \ ,$$

gli integrali essendo estesi al piano σ conduttore, ed essendo

$$\overline{e}_1 = e_1(x', y', t - Ar) \ , \ \overline{u}_1 = u_1(x', y', t - Ar) \ , \ \overline{v}_1 = v_1(x', y', t - Ar).$$

indicando $x'\, y'$ le variabili di integrazione, r la distanza del punto qualunque $(x\, y\, z)$ a cui si riferisce il potenziale dal punto $x'\, y'$. Per le precedenti espressioni dei potenziali ritardati indotti si riconosce quindi che le forze elettromagnetiche indotte, al pari delle inducenti, si annullano all'infinito solo di primo ordine. Le funzioni F_1, U_1, V_1 come potenziali ritardati si sa che devono soddisfare l'equazione

$$(11) \qquad \square f = \Delta_2 f - A^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = 0 \, ,$$

ed all'equazione di continuità

$$(12) \qquad A \frac{dF_1}{dt} + \frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} = 0 \, ;$$

inoltre per le loro espressioni analitiche (10) esse devono essere funzioni pari di z, ed avere lo stesso valore nei punti simmetrici rispetto al piano $z = 0$, onde si possono considerare come funzioni di $|z|$. Le loro discontinuità relative al piano $z = 0$ sono

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{dF_1}{d|z|} = e_1 \ , \ -\frac{1}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|} = A u_1 \ , \ -\frac{1}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|} = A v_1$$

Resta da tener conto per il piano conduttore della legge di Ohm; per essa si sa che la corrente è proporzionale alla componente tangenziale della forza elettrica ed ha la stessa direzione. Quindi essendo k una costante [1] (un trentesimo della resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore espressa in Ohm) le condizioni relative al piano $z = 0$ sono:

$$(13) \qquad \begin{cases} -\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|z|} = -\dfrac{d}{dx}(F + F_1) - A\dfrac{d}{dt}(U + U_1) \, , \\[2ex] -\dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|z|} = -\dfrac{d}{dy}(F + F_1) - A\dfrac{d}{dt}(V + V_1) \, , \end{cases}$$

[1] Vedi Levi-Civita, mem. cit., pag. 25.

ossia anche

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dU_1}{d|z|}-\dfrac{dF_1}{dx}-A\dfrac{dU_1}{dt}=\dfrac{dF}{dx}+A\dfrac{dU}{dt}\,, \\[2ex] \dfrac{k}{2\pi}\dfrac{dV_1}{d|z|}-\dfrac{dF_1}{dy}-A\dfrac{dV_1}{dt}=\dfrac{dF}{dy}+A\dfrac{dV}{dt}\,. \end{cases}$$

Per le proprietà di cui godono F_1, U_1, V_1 i primi membri delle (14) sono funzioni regolari di $x, y, |z|$ nel semispazio $|z| > 0$, riducentisi rispettivamente per $z = 0$ a

$$\frac{dF}{dx}+A\frac{dU}{dt}\quad,\quad \frac{dF}{dy}+A\frac{dV}{dt},$$

e verificanti l'equazione $\square f = 0$. A tutte queste condizioni soddisfanno anche i secondi membri, purchè in essi si sostituisca $-|z|$ a z, con che si toglie la singolarità che presentano nel punto occupato dalla carica; indichiamo i potenziali inducenti dopo la sostituzione con F', U', V'. Dopo questo i primi ed i secondi membri della (14) soddisfanno alle stesse condizioni, all'infinito però si annullano in generale solo di primo ordine. Circa il comportamento all'infinito delle forze elettromagnetiche induttrici ed indotte è possibile fare un'ipotesi, conciliabile coll'esperienza, ed in base alla quale le (14), valevoli per i punti del piano $z = 0$, si possono estendere a tutto lo spazio.

Nel caso di un piano di conduttività infinita ($k = 0$) si ritiene concordemente che il piano stesso ha la facoltà di sopprimere l'azione elettrica e magnetica della carica in moto, onde al di là del piano, cioè dalla parte opposta a quella della carica, le forze elettromagnetiche sono nulle. Nelle ordinarie condizioni sperimentali la costante k, per quanto diversa da zero, è da ritenersi però sempre piccolissima; si è inoltre sempre riconosciuto che le forze elettriche (somma dell'inducente e dell'indotta) al di là del piano conduttore sono trascurabili. Infatti in tutte le esperienze sulla convezione, lo schermo metallico ha l'ufficio di proteggere l'ago dalle azioni elettriche. È quindi conciliabile coi fatti sperimentati l'ipotesi che le quantità

$$\frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|}\,,\quad \frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|}\,,$$

si annullino all'infinito almeno di secondo ordine, come pure le altre

$$-\frac{dF'}{dx}-A\frac{dU'}{dt}-\frac{dF_1}{dx}-A\frac{dU_1}{dt}\,,$$

$$-\frac{dF'}{dy}-A\frac{dV'}{dt}-\frac{dF'}{dy}-A\frac{dV_1}{dt}\,,$$

le quali sono le componenti delle forze elettriche al di là del piano secondo gli assi x, y. In base a queste ipotesi si può dimostrare [1] che le funzioni

$$P = \frac{k}{2\pi}\frac{dU_1}{d|z|} - \frac{dF_1}{dx} - A\frac{dU_1}{dt} - \frac{dF'}{dx} - A\frac{dU'}{dt},$$

$$Q = \frac{k}{2\pi}\frac{dV_1}{d|z|} - \frac{dF_1}{dy} - A\frac{dV_1}{dt} - \frac{dF'}{dy} - A\frac{dV'}{dt},$$

per le proprietà di cui godono, e poichè si annullano all'infinito almeno di secondo ordine, sono nulle in tutto lo spazio; onde si conclude che le (14), in cui si sostituisca F', U', V', ad F, U, V, sono valevoli in tutto lo spazio, e non solo sul piano $z = 0$.

Dall'equazioni (11), (12), (14), risultano allora completamente determinate le funzioni incognite F_1, U_1, V_1. Resta così giustificato il procedimento di cui mi sono valso nel considerare il caso di una carica in moto circolare uniforme parallelamente ad un piano conduttore indefinito per estendere le relazioni analoghe alle (14), relative al piano conduttore, a tutto lo spazio, e procedere quindi alla determinazione dei potenziali indotti.

Geometria. — *Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio*. Nota di Luigi Berzolari, presentata dal Socio C. Segre.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fotografia del cielo. — *Sulla precisione delle posizioni stellari ottenute col metodo fotografico*. Nota II di G. Boccardi [2], presentata dal Corrispondente A. Riccò [3].

Nella mia Nota precedente dall'istesso titolo (vol. XII, 1° sem. 1903, pag. 601), addussi alcune prove del fatto, oramai accertato, della grande precisione che si può raggiungere nelle posizioni fotografiche delle stelle. Siccome però la concisione di quella Nota potrebbe dar luogo ad equivoci, ritorno sull'argomento, quantunque esso sia un po' alieno dalle ricerche cui si dedica l'Osservatorio di Torino [4].

(1) Vedi la Nota; *Campo elettromagnetico* ecc. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XII, 1° sem. 1903, pag. 162.

(2) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Torino.

(3) Presentata nella seduta del 10 aprile 1904.

(4) In Italia l'unico Osservatorio governativo in cui si coltivi l'Astrofotografia è quello di Catania.