

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

gli assi  $x, y$ . In base a queste ipotesi si può dimostrare <sup>(1)</sup> che le funzioni

$$P = \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|} - \frac{dF_1}{dx} - A \frac{dU_1}{dt} - \frac{dF'}{dx} - A \frac{dU'}{dt}, \quad (11)$$

$$Q = \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|} - \frac{dF_1}{dy} - A \frac{dV_1}{dt} - \frac{dF'}{dy} - A \frac{dV'}{dt},$$

per le proprietà di cui godono, e poichè si annullano all'infinito almeno di secondo ordine, sono nulle in tutto lo spazio; onde si conclude che le (14), in cui si sostituisca  $F', U', V'$ , ad  $F, U, V$ , sono valevoli in tutto lo spazio, e non solo sul piano  $z = 0$ .

Dall'equazioni (11), (12), (14), risultano allora completamente determinate le funzioni incognite  $F_1, U_1, V_1$ . Resta così giustificato il procedimento di cui mi sono valso nel considerare il caso di una carica in moto circolare uniforme parallelamente ad un piano conduttore indefinito per estendere le relazioni analoghe alle (14), relative al piano conduttore, a tutto lo spazio, e procedere quindi alla determinazione dei potenziali indotti.

**Geometria.** — *Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio C. SEGRE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Fotografia del cielo.** — *Sulla precisione delle posizioni stellari ottenute col metodo fotografico.* Nota II di G. BOCCARDI <sup>(2)</sup>, presentata dal Corrispondente A. RICCÒ <sup>(3)</sup>.

Nella mia Nota precedente dall'istesso titolo (vol. XII, 1° sem. 1903, pag. 601), addussi alcune prove del fatto, oramai accertato, della grande precisione che si può raggiungere nelle posizioni fotografiche delle stelle. Siccome però la concisione di quella Nota potrebbe dar luogo ad equivoci, ritorno sull'argomento, quantunque esso sia un po' alieno dalle ricerche cui si dedica l'Osservatorio di Torino <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Vedi la Nota; *Campo elettromagnetico* ecc. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XII, 1° sem. 1903, pag. 162.

<sup>(2)</sup> Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Torino.

<sup>(3)</sup> Presentata nella seduta del 10 aprile 1904.

<sup>(4)</sup> In Italia l'unico Osservatorio governativo in cui si coltiva l'Astrofotografia è quello di Catania.

È noto che in Astronomia le posizioni delle stelle *fondamentali* riposano ognuna sopra più centinaia di osservazioni, mentre le posizioni stellari dei cataloghi, anche migliori, posano sopra un numero molto minore di osservazioni; ma ciò non toglie che, parlando di cataloghi, si possa dire che i migliori fra essi poggiano sopra molte osservazioni per ciascuna stella, mentre i cataloghi di precisione minore (ordinariamente i più antichi) hanno posizioni stellari basate sopra una, due o al più tre o quattro osservazioni. S'intende bene che le espressioni *poche o molte osservazioni* sono relative.

Io non credo si possa ritenere che le posizioni delle fondamentali sieno conosciute con precisione di  $0^s,01$  in ascensione retta e  $0'',1$  in declinazione. Per convincersene, basta percorrere le diverse liste di correzioni proposte alle stelle fondamentali. Prendiamo il *Fundamental Catalog* di Auwers. Nel II volume delle Pubblicazioni dell'Osservatorio di Strasburgo sono date le correzioni a 368 stelle del citato catalogo fondamentale, poggiate sopra osservazioni molto esatte eseguite col grande circolo meridiano di quell'Osservatorio e ridotte con accuratezza straordinaria. Ora le prime 150 stelle hanno in detta lista una correzione media di  $\pm 0^s,037$  e  $\pm 0'',40$ . L'istesso Auwers nel Berliner Jahrbuch pel 1904 ha proposte delle correzioni alle sue fondamentali. La media delle correzioni per le prime 150 stelle è:  $\pm 0^s,045$  e  $\pm 0'',29$ . Finalmente il confronto delle posizioni date per le medesime stelle in diversi cataloghi fondamentali, per esempio quelli di Auwers e di Newcomb, mostra divergenze ben superiori a  $0^s,01$  e  $0'',1$ .

Nella mia Nota precedente, io non intendevo nè potevo certamente parlare delle fondamentali; altrimenti avrei dovuto indicarlo. Invece in essa io mi occupavo della precisione delle posizioni date dai migliori cataloghi e basate sopra molte osservazioni. Fo notare però che quando in detta Nota io vengo a valutare di quanto è superiore la precisione delle posizioni fotografiche alle meridiane, per esempio: « 10 volte maggiore » a rigore di linguaggio bisognerebbe dire non *precisione 10 volte maggiore, ma peso 10 volte maggiore*. Ciò secondo la teoria dei minimi quadrati.

Nella citata Nota ho paragonato fra loro posizioni fotografiche delle medesime stelle date da diversi Osservatori, e poi posizioni delle identiche stelle, come risultano da osservazioni meridiane eseguite anche in diversi Osservatori. L'accordo fra le posizioni fotografiche è notevolmente maggiore che fra le meridiane, ed ho creduto poterne dedurre che il metodo fotografico dà risultati migliori del metodo ordinario. Questa illazione mi sembra legittima, perchè riguardo alle posizioni meridiane i dati pei diversi Osservatori erano assolutamente gli stessi, cioè le posizioni delle medesime stelle fondamentali, desunte dal catalogo di Newcomb, e, per giungere alle posizioni meridiane delle stelle riferite a dette fondamentali, rimaneva il procedimento delle osservazioni differenziali al circolo meridiano. Quanto alle posizioni fotografiche i dati erano anche gli stessi pei vari Osservatori, cioè le

posizioni delle stelle che i Francesi chiamano *de repère* <sup>(1)</sup> (da non confondersi con le stelle *de comparaison*) e per giungere alle posizioni fotografiche rimaneva il procedimento della riduzione delle lastre, poggiato anch'esso sopra misure differenziali. Se non vado errato, si può in queste condizioni istituire un confronto fra l'un procedimento e l'altro, ch'è quello che mi son proposto. Ora i risultati del metodo fotografico si accordano fra loro molto meglio che i risultati del metodo meridiano; mi sembra dunque che si possa conchiudere che, nelle date condizioni, il metodo fotografico sia superiore all'altro.

Se si dicesse che le misure differenziali al meridiano nei vari Osservatori per le medesime stelle non furono fatte relativamente all'identico gruppo di fondamentali, farò osservare che nella riduzione delle lastre in diversi Osservatori il numero delle stelle di *repère* fu diverso, e per le lastre di Catania di non poco inferiore a quello di Parigi e di Bordeaux. Aggiungo che i centri stessi delle lastre contenenti le stelle da me scelte pel confronto non ebbero la stessa posizione in  $\alpha$  e  $\delta$ , perchè a Parigi e a Bordeaux si ebbe in mira di fotografare principalmente il pianeta *Eros*, e le ore essendo diverse pei due Osservatori, le posizioni dei centri delle lastre erano anche diverse. Quanto poi alle lastre di Catania da me ridotte, esse appartengono alla serie del catalogo fotografico, e non furono eseguite in vista di *Eros* <sup>(2)</sup>. Più ancora, i metodi di misura delle coordinate rettilinee delle stelle e di riduzione in coordinate sferiche furono affatto diversi negli Osservatori di Parigi, Bordeaux e Catania; eppure le posizioni fotografiche si accordano tanto. Mi sembra che la teoria degli errori ci conduca alla conclusione che il metodo fotografico ci permette di raggiungere maggiore precisione nelle posizioni delle stelle, poichè con esso, partendo da dati abbastanza diversi e procedendo con metodi diversi di misura e calcolo, si giunge a risultati quasi identici.

Ma forse si obietterà che allora la superiorità del metodo fotografico deve attribuirsi al metodo dei minimi quadrati, non ai procedimenti fotografici. A ciò io rispondo che non veggo perchè non si possano paragonare due metodi di ricerca astronomica, in uno dei quali entra il metodo dei minimi quadrati, nell'altro no. D'altronde anche le posizioni stellari meridiane dei diversi Osservatori da me confrontate fra loro sono la media di 3, 4, . . . fino a 9 osservazioni eseguite in ognuna di quelle specole, e con ciò il metodo dei minimi quadrati entra anche nelle posizioni meridiane. Si aggiunga che nella riduzione delle lastre si ottengono risultati quasi identici determinando le costanti anche con altri metodi di risoluzione delle equazioni in

<sup>(1)</sup> Forse si potrebbe chiamarle in italiano *stelle capisaldi*.

<sup>(2)</sup> Però l'Osservatorio di Catania ha preso parte anch'esso al lavoro internazionale per *Eros*, fotografando la zona di cielo percorsa da quel pianeta.

numero maggiore delle incognite, come ha dimostrato recentemente il chiarissimo dott. Cerulli nelle *Memorie della Società degli Spettroscopisti* (Vol. XXXIII, pag. 20). Del resto, la superiorità delle posizioni fotografiche dipende non solo dalle compensazioni che porta il metodo dei minimi quadrati, introdotto con le molte stelle di *repère*, ma anche dalla esattezza con cui si misurano le distanze delle immagini stellari dal centro della lastra.

Può darsi che questi argomenti non riescano a convincere tutti, sicchè, per togliere ogni dubbio, bisognerebbe mostrare non solo l'accordo delle posizioni fotografiche fra loro, ma anche il loro accordo con la verità, cioè col cielo stesso. Ebbene, non potendo noi giungere mai a posizioni assolutamente esatte, perchè non vi è limite in questa materia, mi sembra tuttavia che si possa procedere col seguente criterio. Volendo istituire un confronto fra due risultati ottenuti per via diversa, se non si possiede il valore assolutamente esatto dell'elemento che si vuol determinare, si può ricorrere per termine di comune confronto ad un valore che si avvicina certamente più degli altri due alla verità. Per esempio, volendo istituire un confronto fra una determinazione del tempo col sestante ed un'altra col teodolite, si può ricorrere per comune confronto ad una determinazione del tempo fatta con un buon strumento dei passaggi. Ecco ora in qual modo io applico questo criterio per mostrare il maggior accordo *assoluto* delle posizioni fotografiche col cielo. Prendo delle posizioni stellari da un catalogo fotografico ben costruito, per esempio quello di Parigi, e le paragono con le posizioni delle medesime stelle dedotte dall'insieme delle osservazioni di straordinaria precisione fattene nel 1900 per la opposizione di *Eros*. Gli astronomi ammetteranno concordemente che queste ultime posizioni sieno vicinissime alla verità. Dal detto confronto risulta immediatamente che le posizioni fotografiche si accordano con quelle, lasciando divergenze più piccole dell'errore medio che rimane sulle posizioni meridiane date dai migliori cataloghi. Mi sembra che sono in diritto di conchiudere che le posizioni fotografiche hanno una superiorità che direi assoluta, perchè si accordano col cielo meglio che i cataloghi meridiani.

Nel quadro seguente io do per 13 stelle della *Durchmusterung*: 1° le posizioni fotografiche dedotte dal catalogo di Parigi (I vol.); 2° le posizioni meridiane in esso adottate per le medesime stelle (che sono di *repère*), posizioni poggiate ognuna sopra molti cataloghi meridiani fra i migliori esistenti (come può vedersi nella introduzione); 3° le posizioni meridiane delle medesime stelle basate sopra tutte le osservazioni fattene in molti Osservatori nel 1900; 4° le differenze fra le posizioni fotografiche e queste ultime; 5° le differenze fra le posizioni meridiane poggiate su molti cataloghi e le posizioni meridiane del 1900 (1).

(1) Nella costruzione della tabella seguente mi sono valso dell'opera intelligente del sig. dott. Nicolis.

D. M.	gr.	Pos. mer.			Pos. fot.			Pos. mer. 1900	1900 - fot.		1900 - mer.		
		h	m	s	o	'	"		s	"	s	"	
+24.533	7,9	3.35	20,18	20,06	20,26	+24.41	6,2	6,7	5,8	+ 0,08	- 0,4	+ 0,20	- 0,9
24.537	7,9	3.37	44,68	44,72	44,78	24.45	52,0	51,9	51,1	+ 0,10	- 0,9	+ 0,06	- 0,8
23.562	8,2	3.43	28,59	28,59	28,66	23.56	33,8	34,0	33,0	+ 0,07	- 0,8	+ 0,07	- 1,0
24.578	8,1	3.44	29,90	29,87	29,97	24.11	31,1	30,9	30,5	+ 0,07	- 0,6	+ 0,16	- 0,4
23.570	7,5	3.44	55,48	55,38	55,53	23.39	34,2	34,2	33,0	+ 0,05	- 1,2	+ 0,15	- 1,2
24.589	8,8	3.46	54,50	54,48	54,54	24.25	4,3	4,7	3,3	+ 0,04	- 1,0	+ 0,06	- 1,4
23.584	8,8	3.49	4,49	4,49	4,54	23.39	45,8	45,6	46,1	+ 0,05	+ 0,3	+ 0,05	+ 0,5
24.595	8,4	3.49	7,52	7,50	7,58	24.48	40,9	40,3	40,7	+ 0,06	- 0,2	+ 0,08	+ 0,4
23.589	8,6	3.50	40,75	40,73	40,79	23.18	14,3	14,3	14,6	+ 0,04	+ 0,3	+ 0,06	+ 0,3
23.594	7,8	3.52	22,67	22,64	22,72	23.47	40,4	40,0	39,3	+ 0,05	- 1,1	+ 0,08	- 0,7
23.600	7,8	3.53	6,40	6,42	6,39	23.20	29,2	28,7	29,4	- 0,01	+ 0,2	- 0,03	+ 0,7
23.606	8,9	3.57	48,86	48,87	48,91	24.	7,32,0	31,9	32,1	+ 0,05	+ 0,1	+ 0,04	+ 0,2
23.611	8,7	3.58	52,38	52,38	52,39	+23.14	5,0	4,6	5,2	+ 0,01	+ 0,2	+ 0,01	+ 0,6

Riducendo le  $\Delta\alpha$  in  $\Delta\alpha \cos \delta$  espresse in secondi d'arco, e formando i quadrati delle  $\Delta\alpha \cos \delta$  e  $\Delta\delta$ , pel calcolo dell'errore medio, questo risulta:

$$\begin{aligned} \text{per le posizioni fotografiche} & e_m = \pm 0'',754 \text{ (}^1\text{)} \\ \text{" " meridiane} & e_m = \pm 1,055 \end{aligned}$$

Si vede che l'accordo col cielo è di non poco maggiore per le posizioni fotografiche che per le posizioni meridiane basate sopra molti cataloghi. Riflettendo all'entità ed ai segni delle divergenze ora scritte, si nota subito che esse hanno andamento sistematico e analogo per i due sistemi di posizioni. L'andamento sistematico si spiega con la diversità delle posizioni adottate per le fondamentali nelle osservazioni ai circoli meridiani prima del 1900 (nella costruzione dei cataloghi su i quali sono basate le posizioni delle stelle di *repère*) e nel 1900, quando fu adottato il catalogo fondamentale di Newcomb.

L'analogia (identità del segno e vicinanza dei valori) delle differenze per le posizioni fotografiche e le meridiane, si spiega evidentemente col fatto che quelle sono poggiate su queste e quindi sulle antiche posizioni delle fondamentali. Si osserva però l'effetto del combinare insieme molte stelle di *repère* per ogni lastra, con che, pure rimanendo sulle posizioni fotografiche, gli errori sistematici delle posizioni meridiane (dipendenti dalle fondamentali), sono però in larga misura attenuati gli errori accidentali di osservazione. Si noti da ultimo che l'errore medio  $\pm 0'',754$  per le posizioni fotografiche darebbe una idea non tanto vantaggiosa della precisione del catalogo fotografico di Parigi; ma quel valore piuttosto rilevante dipende da che le

(<sup>1</sup>) Per ragioni facili a intendersi non mi si obietterà che l'esistenza di errori sistematici non renda legittimo l'impiego del metodo dei minimi quadrati. Gli errori sistematici sono gli stessi per l'uno e per l'altro genere di misure da me confrontati.

lastre contenenti le 13 stelle sono fra le prime fotografate in quell'Osservatorio, cioè più di un decennio prima del 1900; si comprende quindi che nelle divergenze: 1900 — posiz. fotogr. (siccome del resto anche per le divergenze: 1900 — posiz. merid.) entrino i moti propri. Se le stelle di confronto per *Eros* non fossero comprese fra le prime ore di ascensione retta, avrei potuto scegliere dal catalogo fotografico di Parigi lastre eseguite in epoche vicine al 1900, e l'accordo col cielo sarebbe risultato maggiore. Appunto per mettersi al sicuro dalle incertezze dei moti propri, l'Osservatorio di Parigi fa attualmente riosservare le stelle di *repère* adottate nel catalogo fotografico.

Se poi si credesse opportuno addurre argomenti di autorità in questa materia, senza tornare su quanto scrive Loewy nelle circolari dell'Osservatorio di Parigi, e nel catalogo fotografico, io citerei:

Scheiner (*Photographie der Gestirne*, pag. 182). « L'esperienza ha insegnato che una buona lastra, dopo accurata misura e riduzione, dà posizioni di stelle, l'errore medio delle quali non oltrepassa  $0''.1$  »;

Donner (*Sur le rattachement des clichés photographiques. Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 8<sup>me</sup> partie, 1896) « l'errore probabile di una posizione fotografica è:  $\pm 0''.01$  e  $\pm 0''.1$  »;

Van de Sande Bakhuyzen (*Bulletin de la Carte du Ciel*, I vol.) dà  $\pm 0''.11$  o almeno  $\pm 0''.14$  per precisione delle posizioni fotografiche;

Ritchard (*Ricerche sulla fotografia delle stelle. Nature*, London XXXIV, pag. 305) dà le posizioni fotografiche delle Pleiadi con errore medio  $\pm 0''.24$ ; mentre con osservazioni all'eliometro l'errore medio era di  $\pm 0''.29$ . E questo nel 1888, quando appena cominciavano i saggi di riduzione di lastre; oggi la precisione cui si può giungere è molto maggiore;

Wilsing, *Ueber die Genauigkeit photographischer Messung (Astron. Nach.* 141, pag. 89);

O. Bergstrand, *Sull'applicazione della fotografia alla determinazione delle parallassi*, Upsala, 1899;

Rambaut, *Monthly Notices*, LVII.

Ometto molte altre citazioni del Bulletin Astronomique e di altre pubblicazioni astronomiche.

Dopo un accordo simile fra coloro che si sono occupati direttamente di fotografia celeste, si comprende che non conviene fermarsi ad un'affermazione senza dimostrazione sfuggita all'illustre professore di *Meccanica celeste*, il compianto Tisserand, in una Notizia popolare, in cui scrive che la precisione delle posizioni fotografiche non potrebbe oltrepassare quella delle posizioni meridiane, e che le è presso a poco uguale. Forse egli parlava di

lastre ridotte con stelle di *repère* poche di numero o di posizione non molto esatta. È vero che nelle decisioni dei congressi per la carta del cielo fu assegnato 10 come limite inferiore del numero di stelle di *repère* per le lastre del catalogo fotografico, ma in pratica, questo numero è oltrepassato di non poco. Per convincersene, basta consultare il catalogo fotografico di Helsingfors e più quello di Parigi, nel quale le lastre hanno, in media, da 25 a 30 stelle di *repère*. Che se in alcuno degli Osservatori partecipanti al lavoro suddetto si è stati paghi di pubblicare le sole coordinate rettilinee, senza le costanti di riduzione, oppure si è adottato sempre il numero 12 di stelle di *repère*, desumendole tutte da un sol catalogo, in altri Osservatori, non solo si è preso il maggior numero possibile di stelle di *repère*, ma se n'è elaborato un catalogo, compilandolo su i migliori esistenti, e inoltre se n'è riosservato un numero eguale in epoche vicine al 1900.

Nell'Osservatorio di Parigi si è pubblicato il I volume del catalogo fotografico che abbraccia 64264 stelle, e le lastre sono state ridotte con tanta cura, che il direttore di quella specola, il Loewy, scrive nella introduzione allo stesso: « On peut se rendre compte d'une manière plus tangible de la précision obtenue. En s'aidant de la formule  $\frac{2n}{n+1}$ , la comparaison de l'erreur totale 0'',31 (1) avec le chiffre  $\pm 0'',80$  (2) défini plus haut montre que l'exactitude d'une coordonnée astronomique tirée du présent volume équivaut à celle qu'offre la moyenne d'environ 10 positions d'étoiles de repère empruntées à cinq catalogues. De cette analyse il résulte ainsi avec évidence que la méthode photographique réalise de la manière la plus satisfaisante les espérances qu'on avait fondées sur son efficacité ». Eppure a Parigi, dopo edificato un simile monumento scientifico, si preparano ad una nuova riduzione delle stesse lastre, adottando per le stelle di *repère* posizioni dedotte dalla loro riosservazione ai circoli meridiani, intorno al 1900. Tanto si è preso a cuore in quell'Osservatorio un lavoro di cui ivi stesso fu presa l'iniziativa.

Ma io non veggio come si vogliano addurre nella questione che ho trattata nella mia Nota precedente le disposizioni dei congressi per la carta del cielo, il modo con cui furono interpretate in questo o in quell'Osservatorio, anzi non veggio che relazione abbia l'intero lavoro del catalogo fotografico internazionale con la mia tesi che riguarda *la precisione che si può raggiungere sulle posizioni fotografiche*. Si sa infatti che questo nuovo campo di ricerca scientifica non è coltivato soltanto negli Osservatori partecipanti al detto lavoro internazionale; io poi ho trattato in generale della precisione che può ottenersi con una riduzione delle lastre fatta bene, ed a siffatte lastre si riferiscono le conclusioni della mia Nota.

(1) Di una coordinata fotografica.

(2) Errore probabile di una posizione meridiana presa da un sol catalogo.

Un punto essenziale da assodare è che il procedimento fotografico permette di ottenere l'esattezza che ho dimostrata riguardo a stelle piccolissime, fino alla 13<sup>a</sup> grandezza, come si è veduto nella opposizione di *Eros* (*Circolare N. 10 dell'Osservatorio di Parigi*); così che il lavoro prodotto dal metodo fotografico è, anche per l'estensione, superiore a quello finora prodotto dal metodo classico di osservazione. A nessuno verrà certo in mente che col fin qui detto io intenda in qualche modo scemare alcun che della stima in cui devesi avere l'opera tanto meritoria degli astronomi, che osservano al circolo meridiano; tanto più che, almeno finora, le posizioni meridiane sono la base su cui poggia il lavoro di riduzione delle lastre. Non v'ha dubbio però che quando nella regione celeste corrispondente ad una lastra fotografica <sup>(1)</sup> si possederanno le posizioni fotografiche di una ventina di stelle, naturalmente si adotteranno le posizioni fotografiche come capisaldi, ossia stelle di *repère*, non più le posizioni meridiane.

Se non vado errato, nella presente Nota ho precisato i termini della mia tesi e l'ho provata in modo convincente; ma con essa e con la Nota precedente io non ho menomamente avuto intenzione di far sorgere fra due procedimenti astronomici un dualismo che non deve aver luogo, siccome non esiste dissenso alcuno fra gli astronomi, i quali adoperano l'uno o l'altro. Forse il miglior modo di evitare quel dualismo sarebbe il rendersi familiare, con l'esercizio, l'uno e l'altro metodo, avvalendosene simultaneamente a vantaggio dell'astronomia.

Nell'Annuario del R. Osservatorio di Torino pel 1905 io darò più ampio sviluppo all'argomento della presente Nota.

**Fisica matematica.** — *La circolazione atmosferica negli strati inferiori.* Nota di LUIGI DE MARCHI, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) S'intende eseguita non in vista del catalogo fotografico, ma per altre ricerche posteriori, come per esempio il lavoro su *Eros*.