ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 gennaio 1904.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra la funzione* $E_\alpha(x)$. Nota del Socio straniero G. Mittag Leffler.

Ho enunciato recentemente [1] alcune proprietà della mia nuova funzione

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha \, . \, 1 + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(\alpha \, . \, 2 + 1)} + \cdots + \frac{x^\nu}{\Gamma(\alpha \, . \, \nu + 1)} + \cdots$$

nel caso in cui la costante α è positiva.

Il metodo impiegato per ottenere questi resultati mi permette pure di studiare la funzione $E_\alpha(x)$ nel caso in cui α sia complesso.

Pongasi

$$\alpha = \beta + i\gamma$$

e supponiamo

$$\beta > 0$$

il che è necessario affinchè $E_\alpha(x)$ sia una funzione intera.

Poniamo inoltre, per semplificare,

$$\beta(2 - \beta) > \gamma^2.$$

Gli altri casi si possono trattare collo stesso metodo.

(1) Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences (Séance du 12 octobre 1903)

Consideriamo la spirale logaritmica

$$R = e^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}\psi}\, e^{\frac{\beta}{\gamma}\theta}$$

in cui R e θ designano le coordinate polari dei punti della spirale e ψ è una quantità reale. Se si fa variare ψ da $-\infty$ a $+\infty$, il piano complesso x sarà coperto interamente dall'insieme delle varie spirali che si ottengono. Si vede d'altra parte che due spirali diverse non hanno nessun punto comune.

Il modulo

$$\left| E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} \right|$$

si avvicina indefinitamente a zero quando x va verso l'infinito lungo una spirale

$$R = e^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}\psi}\, e^{\frac{\beta}{\gamma}\theta}$$

se ad essa corrisponde un valore di ψ tale che

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2},$$

mentre il modulo $|E_\alpha(x)|$ si avvicina indefinitamente a zero allorchè x va verso l'infinito lungo una spirale corrispondente ad un valore diverso di ψ.

Si vede immediatamente che nel primo caso

$$\left|\frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}\right| = \frac{1}{|\alpha|} e^{e^{-\frac{\beta}{\gamma}\psi+\frac{1}{\gamma}\theta} \cdot \cos\psi} = \frac{1}{|\alpha|} e^{e^{\frac{\gamma}{\beta}\psi} \cdot R^{\frac{1}{\beta}} \cdot \cos\psi}, \text{ per } -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}\right| = \frac{1}{|\alpha|}, \qquad \text{per } \psi = \pm\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza il modulo $|E_\alpha(x)|$ aumenta indefinitamente quando x va verso l'infinito lungo una spirale $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, mentre si approssima indefinitamente verso $\frac{1}{|\alpha|}$ allorchè x va verso l'infinito lungo una delle due spirali $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Il resultato più interessante che si ottiene collo studio di questa funzione $E_\alpha(x)$ è il seguente.

Poniamo

$$F(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

in cui la serie $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots$ sia convergente in un certo campo.

Denotiamo con A la stella curvilinea che si ottiene muovendosi verso l'infinito sopra ciascuna delle spirali

$$R = e^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}\psi} e^{\frac{\beta}{\gamma}\theta}; \quad -\infty < \psi < +\infty$$

ed escludendo dal piano la parte di ogni spirale che si trova fra il primo punto singolare di $F(x)$ e l'infinito.

Introduciamo la funzione

$$F_\alpha(x) = k_0 + \frac{k_1}{\Gamma(\alpha . 1 + 1)} x + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha . 2 + 1)} x^2 + \cdots + \frac{k_\nu}{\Gamma(\alpha . \nu + 1)} x^\nu + \cdots$$

e studiamo l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega .$$

Ad ogni valore di α corrisponde una stella curvilinea $B^{(\alpha)}$ formata dalle stesse spirali di A, la quale è inscritta in A e nel tempo stesso è una stella di convergenza dell'integrale.

Si hanno le due eguaglianze

$$FB^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega$$

$$FA(x) = \lim_{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}=0} \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega .$$

La stella A dell'ultima formula è al pari della stella $B^{(\alpha)}$ della prima, una stella di convergenza del secondo membro.

Il resultato è interessante poichè è la prima volta che una stella curvilinea si presenta spontaneamente in un problema generale d'analisi.

Debbo peraltro osservare che il sig. E Lindelöf ha, d'altra parte, trattato recentemente un'altra questione nella quale la spirale comparisce in modo analogo (¹).

(¹) *Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor*. Journal de math. pures et appl., série V, t. 9, pages 220, 221.