ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Matematica. — *Sui fondamenti della Geometria intrinseca non-euclidea.* Nota del Corrispondente E. CESÀRO[1].

Per liberare la Geometria intrinseca piana dal postulato di Euclide è necessario riferire i punti del piano al più generale sistema di coordinate curvilinee, assumendo

$$\mathrm{E}\delta u^2 + 2\mathrm{F}\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\delta v^2, \tag{1}$$

con E, F, G funzioni qualunque delle coordinate u, v, come espressione del quadrato della distanza fra i punti (u, v) ed $(u + \delta u, v + \delta v)$, infinitamente vicini. Se poi si vuole che il reticolo delle linee coordinate possa rigidamente spostarsi nel piano, in tutti i sensi, ognun sa che deve risultare *costante*, in tutto il piano, il noto invariante K, che nell'ipotesi di Euclide ha il valore zero. Ora s'immagini che il detto reticolo vada occupando una semplice infinità di posizioni, in corrispondenza dei valori d'un parametro t. In ciascuna di esse ogni punto, *fisso* nel piano, avrà coordinate dipendenti dal valore di t; ed al variare di questo le coordinate stesse varieranno con rapidità vincolata unicamente alla posizione del punto nel piano, sicchè si avrà

$$\frac{du}{dt} = \varphi(u, v) \quad , \quad \frac{dv}{dt} = \psi(u, v), \tag{2}$$

con φ e ψ che pur dipendono dai coefficienti della forma fondamentale (1). Per ogni punto mobile la rapidità di variazione delle coordinate, rispetto al reticolo pensato per un istante come immobile, verrà misurata mediante gli eccessi dei primi sui secondi membri delle (2); e però queste, prese insieme, esprimono anche quanto *basta* per l'immobilità del punto (u, v). Applicandole al punto $(u + \delta u, v + \delta v)$ si trova

$$\frac{d}{dt}\delta u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v \quad , \quad \frac{d}{dt}\delta v = \frac{\partial\psi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\delta v.$$

D'altra parte l'espressione (1), quadrato della distanza fra due punti *fissi*, non può variare con t. Ne segue che dev'essere

$$(\mathrm{E}\delta u + \mathrm{F}\delta v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v\right) + (\mathrm{F}\delta u + \mathrm{G}\delta v)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\delta v\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}\delta u^2 + 2\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}\delta u\,\delta v + \frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\delta v^2\right)\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\delta u^2 + 2\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}\delta u\,\delta v + \frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\delta v^2\right)\psi = 0,$$

[1] Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

qualunque siano δu e δv; e per conseguenza

$$
(3) \quad \begin{cases}
E\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+F\dfrac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial E}{\partial u}\varphi+\dfrac{\partial E}{\partial v}\psi\right)=0, \\
E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+F\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\right)+G\dfrac{\partial\psi}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\varphi+\dfrac{\partial F}{\partial v}\psi=0, \\
F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+G\dfrac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial G}{\partial u}\varphi+\dfrac{\partial G}{\partial v}\psi\right)=0.
\end{cases}
$$

Qui conviene introdurre i simboli di Christoffel (¹) di seconda specie $\left\{\begin{matrix} ij \\ k \end{matrix}\right\}$, che per semplicità di scrittura rappresenteremo con α_{ijk}; e bisogna ricordare che

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}=E\alpha_{111}+F\alpha_{112} \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}=F\alpha_{121}+G\alpha_{122}, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}=E\alpha_{121}+F\alpha_{122} \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}=F\alpha_{221}+G\alpha_{222}, \\
\frac{\partial F}{\partial u}=E\alpha_{121}+F(\alpha_{111}+\alpha_{122})+G\alpha_{112}, \\
\frac{\partial F}{\partial v}=E\alpha_{221}+F(\alpha_{121}+\alpha_{222})+G\alpha_{122}.
\end{gathered}
$$

Sostituendo questi valori nelle (3), e ponendo, per poco,

$$
\begin{gathered}
\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\alpha_{111}\varphi+\alpha_{121}\psi \quad , \quad \psi_1=\frac{\partial\psi}{\partial u}+\alpha_{112}\varphi+\alpha_{122}\psi, \\
\varphi_2=\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\alpha_{121}\varphi+\alpha_{221}\psi \quad , \quad \psi_2=\frac{\partial\psi}{\partial v}+\alpha_{122}\varphi+\alpha_{222}\psi,
\end{gathered}
$$

si trova

$$
\begin{gathered}
E\varphi_1+F\psi_1=0 \quad , \quad F\varphi_2+G\psi_2=0, \\
E\varphi_2+F(\varphi_1+\psi_2)+G\psi_1=0;
\end{gathered}
$$

poi da queste, osservando che $EG-F^2>0$, è facile dedurre

$$
\varphi_1/F=\varphi_2/G=-\psi_1/E=-\psi_2/F,
$$

sicchè si è condotti a porre

$$
(4) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+\alpha_{111}\varphi+\alpha_{121}\psi=\dfrac{F\chi}{\sqrt{EG-F^2}}, \; \dfrac{\partial\psi}{\partial u}+\alpha_{112}\varphi+\alpha_{122}\psi=-\dfrac{E\chi}{\sqrt{EG-F^2}}. \\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\alpha_{121}\varphi+\alpha_{221}\psi=\dfrac{G\chi}{\sqrt{EG-F^2}}, \; \dfrac{\partial\psi}{\partial v}+\alpha_{122}\varphi+\alpha_{222}\psi=-\dfrac{F\chi}{\sqrt{EG-F^2}}.
\end{cases}
$$

(¹) Bianchi, *Geometria differenziale*, pag. 66.

Ora basta applicare alla coppia di sinistra, come a quella di destra, la nota condizione d'integrabilità $\partial^2/\partial u\partial v = \partial^2/\partial v\partial u$, per trovare le relazioni

$$F\left(\frac{\partial\chi}{\partial v} + K\varphi\sqrt{EG-F^2}\right) - G\left(\frac{\partial\chi}{\partial u} - K\psi\sqrt{EG-F^2}\right) = 0,$$
$$E\left(\frac{\partial\chi}{\partial v} + K\varphi\sqrt{EG-F^2}\right) - F\left(\frac{\partial\chi}{\partial u} - K\psi\sqrt{EG-F^2}\right) = 0,$$

necessarie e sufficienti affinchè esistano le funzioni φ e ψ, soddisfacenti alle (4). Ne segue, per $K \lesseqgtr 0$, poichè $EG - F^2 > 0$,

$$(5) \qquad \varphi = -\frac{\partial\chi/\partial v}{K\sqrt{EG-F^2}}, \quad \psi = \frac{\partial\chi/\partial u}{K\sqrt{EG-F^2}}.$$

Occorre poi, e basta, per l'esistenza di χ, che si abbia

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi\sqrt{EG-F^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\psi\sqrt{EG-F^2}\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v} + (\alpha_{111} + \alpha_{122})\,\varphi + (\alpha_{121} + \alpha_{222})\,\psi = 0,$$

condizione sempre soddisfatta, in virtù delle (4). Sostituendo in queste i valori (5), e richiamando le varie espressioni (¹) di K in funzione dei simboli α, si riconosce che la funzione χ deve soddisfare alle equazioni differenziali

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\chi}{\partial u^2} - \left(\alpha_{111}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} + \alpha_{112}\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right) + EK\chi = 0, \\ \dfrac{\partial^2\chi}{\partial u\partial v} - \left(\alpha_{121}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} + \alpha_{122}\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right) + FK\chi = 0, \\ \dfrac{\partial^2\chi}{\partial v^2} - \left(\alpha_{221}\dfrac{\partial\chi}{\partial u} + \alpha_{222}\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right) + GK\chi = 0, \end{cases}$$

sicchè $\Delta^2\chi + 2K\chi = 0$. Trovata una tal funzione, le (5) faranno poi conoscere φ e ψ.

Le considerazioni precedenti ricevono una facile ed interessante applicazione nella Geometria non-euclidea, quando si adotta (a prescindere da un fattore costante) il sistema di coordinate adoperato da Beltrami nel suo celebre *Saggio* (²), per far sì che le rette siano rappresentate da equazioni

(¹) Bianchi, l. cit., pag. 51.
(²) *Opere matematiche*, t. I, pag. 377.

lineari. Per

$$E=\frac{R^2(R^2-v^2)}{(R^2-u^2-v^2)^2}\,,\quad F=\frac{R^2uv}{(R^2-u^2-v^2)^2}\,,\quad G=\frac{R^2(R^2-u^2)}{(R^2-u^2-v^2)^2}\,,$$

si ha

$$\alpha_{111}=2\alpha_{122}=\frac{2u}{R^2-u^2-v^2}\,,\ \alpha_{222}=2\alpha_{121}=\frac{2v}{R^2-u^2-v^2}\,,\ \alpha_{112}=\alpha_{221}=0,$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\left(\frac{R}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)^3,\quad K=-\frac{1}{R^2}\,;$$

e le (6) diventano

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\chi\sqrt{R^2-u^2-v^2}\right)=0\,,\quad \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\chi\sqrt{R^2-u^2-v^2}\right)=0\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\chi\sqrt{R^2-u^2-v^2}\right)=0\,,$$

d'onde risulta

$$\chi=\frac{R(\varkappa+\lambda u+\mu v)}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\,,$$

con $\varkappa\,,\lambda\,,\mu$ indipendenti da $u\,,v$. Ora dalle (5) si ha

$$\varphi=(\varkappa+\lambda u)\,v+\mu(R^2-u^2)\,,\quad -\psi=(\varkappa+\mu v)\,u+\lambda(R^2-v^2).$$

Ciò premesso, si regoli lo spostamento del reticolo delle linee coordinate mediante una linea segnata ad arbitrio nel piano, obbligando l'origine $M(u=0\,,v=0)$ a percorrere la linea stessa, dirigendo tangenzialmente a questa l'asse delle u, ed assumendo come parametro t l'arco s percorso da M. Per una variazione infinitesima di s dovrà risultare $\delta v=0$, e la espressione (1) dovrà rappresentare, in M, il quadrato ds^2 dell'arco elementare, sicchè, essendo $E=1$, sarà $\delta u=ds$. D'altra parte in M si ha $\varphi=\mu R^2$, $\psi=-\lambda R^2$, e per conseguenza

$$\frac{\delta u}{ds}=-\mu R^2\,,\quad \frac{\delta v}{ds}=\lambda R^2\,;$$

quindi $\lambda=0\,,\mu=-1/R^2$. Dopo ciò le (2) si riducono alla forma

$$\text{(7)}\qquad \frac{du}{ds}=\varkappa v-1+\frac{u^2}{R^2}\,,\quad \frac{dv}{ds}=-\varkappa u+\frac{uv}{R^2}\,.$$

Son queste, in Geometria iperbolica, le *condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto* $(u\,,v)$. Basta cambiare R^2 in $-R^2$ per ottenere le analoghe condizioni in Geometria ellittica.

Rimane da trovare il significato geometrico di $\varkappa$. Affinchè (M) sia una *retta* occorre e basta che, quando M si sposta, l'asse delle u resti immobile, e per conseguenza che l'equazione ottenuta derivando $v=0$, ossia $\varkappa u=0$, sia soddisfatta per qualunque u. Dunque $\varkappa = 0$. Al medesimo risultato si perviene esprimendo che la distanza della retta (M) da qualsiasi punto del piano deve, quando M si sposta, rimanere inalterata. Qui conviene richiamare la formola ([1]) che dà la distanza r fra due punti qualunque (u_0, v_0) ed (u, v):

$$\text{ch}\,\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{(\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2)(\mathrm{R}^2 - u_0^2 - v_0^2)}}. \tag{8}$$

Basta porre $u_0 = u$, $v_0 = 0$, per trovare che la distanza del punto (u, v) all'asse delle u si calcola mediante la formola

$$\text{th}\,\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{v}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - u^2}}, \tag{9}$$

dalla quale, per le (7), si deduce

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{\varkappa \mathrm{R} u}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - u^2}},$$

sicchè, dovendo u rimanere arbitraria, si ritrova $\varkappa = 0$ come condizione necessaria e sufficiente per l'invariabilità di r, ossia perchè (M) sia una retta. Se poi non è $\varkappa = 0$, si può sempre trovare sull'asse delle v un punto C (centro di curvatura, reale o ideale), che si sposta tangenzialmente all'asse. Una delle sue coordinate è $u = 0$; l'altra si ottiene scrivendo $\delta u = 0$, ossia, per la prima delle (7), $v = 1/\varkappa$. Si può dunque esprimere $\varkappa$ in funzione del *raggio di curvatura* $\varrho = \mathrm{MC}$, sostituendo le coordinate di C nella formola (9):

$$\varkappa = 1/\mathrm{R}\ \text{th}\,\frac{\varrho}{\mathrm{R}}. \tag{10}$$

Nel piano euclideo $(\mathrm{R} = \infty)$ questa espressione si riduce ad $1/\varrho$, ed è perciò naturale assumerla come misura della *curvatura*, anche per le osservazioni già fatte e per altre che faremo fra breve. Per ora si noti soltanto che $\varkappa$ è bensì suscettibile di qualsiasi valore reale, ma il centro di curvatura non è reale se non per $|\varkappa| \geqq 1/\mathrm{R}$. I punti nei quali il raggio di curvatura è infinito $(\varkappa = \pm 1/\mathrm{R})$ non sono perciò da confondere, nel piano di Lobatschewsky, con quelli d'*inflessione* $(\varkappa = 0)$, intorno ai quali la linea considerata si comporta come una retta. La prima specie di punti non esiste nel piano di Riemann, e nel piano euclideo essa non apparisce perchè si confonde con l'altra.

([1]) Beltrami, l. cit., pag. 405.

Dalle (7) si passa agevolmente alle analoghe condizioni, relative a qualunque altro sistema di coordinate curvilinee. Se si vuol fare uso di coordinate polari, si noti che la distanza r di M da un punto (u, v) è data, in virtù di (8), dalla formola $R\,\mathrm{th}\,\frac{r}{R} = \sqrt{u^2 + v^2}$, sicchè si è condotti a porre

$$u = R\,\mathrm{th}\frac{r}{R}\cdot\cos\theta \quad , \quad v = R\,\mathrm{th}\frac{r}{R}\cdot\mathrm{sen}\,\theta\,; \tag{11}$$

ed è facile constatare che θ rappresenta appunto l'altra coordinata, cioè la inclinazione del raggio vettore sull'asse delle u. Le (7) si trasformano nelle seguenti relazioni

$$\frac{dr}{ds} = -\cos\theta \,,\quad \frac{d\theta}{ds} = -\varkappa + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{R\,\mathrm{th}\,\frac{r}{R}}, \tag{12}$$

necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (r, θ). In particolare, se (M) è una circonferenza $(r = a)$, la prima condizione dà $\theta = \frac{1}{2}\pi$, vale a dire che nel centro (reale o ideale) concorrono tutte le normali; poi dalla seconda condizione si deduce, ricordando la (10), $\varrho = a$. Una circonferenza è dunque caratterizzata da un'equazione della forma $\varkappa =$ *costante*. Se la costante è $\pm 1/R$ si ha un *oriciclo*, o circolo di raggio infinito, che non si può confondere con la retta, per la quale si ha invece $\varkappa = 0$, come si è visto, e non $\varrho = \infty$. Se la costante ha un valore assoluto minore di $1/R$, la circonferenza è priva di centro reale. Qui apparisce la convenienza di sostituire $\varkappa$ a ϱ nella rappresentazione intrinseca delle curve, affinchè l'equazione conservi la forma reale anche in vicinanza dei punti d'inflessione.

Ora, per trovare la relazione fra un arco infinitesimo di circonferenza e l'angolo al centro, poniamo il polo nel centro e dirigiamo l'asse polare secondo uno dei lati dell'angolo. Così un estremo dell'arco ha le coordinate $u = R\,\mathrm{th}\,\frac{r}{R}$, $v = 0$; e gli incrementi di queste, quando si va nell'altro estremo, si possono calcolare mediante le (11), supponendo $\theta = 0$, $\delta r = 0$, dimodochè $\delta u = 0$, $\delta v = R\,\mathrm{th}\,\frac{r}{R}\cdot\delta\theta$; poi, ricordando l'espressione (1) di ds^2,

$$ds = \sqrt{G}\,.\,\delta v = \frac{R\delta v}{\sqrt{R^2 - u^2}} = R\,\mathrm{sh}\,\frac{r}{R}\cdot\delta\theta.$$

In particolare l'angolo di due *normali* infinitamente vicine è $\eta = ds/R\,\mathrm{sh}\,\frac{\varrho}{R}$. Per trovare l'angolo ε di due *tangenti* infinitamente vicine si deve prima di tutto osservare che, in virtù d'un noto (¹) teorema, l'area compresa fra le quattro rette predette è $(\varepsilon - \eta)\,R^2$. D'altra parte l'area stessa è misurata dall'integrale

$$\eta\int_0^\varrho R\,\mathrm{sh}\,\frac{r}{R}\cdot dr = \eta R^2\left(\mathrm{ch}\,\frac{\varrho}{R} - 1\right).$$

(¹) Lobatschewsky, *Giornale di Battaglini*, 1867, p. 310.

Ne segue $\varepsilon = \eta \operatorname{ch} \frac{\varrho}{R} = ds / R \operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \varkappa\, ds$. Dunque la curvatura $\varkappa$ rappresenta, come in Geometria euclidea, il rapporto di ε a ds.

Evidentemente la curvatura della linea (C), *sviluppata* di (M), è $\varkappa_1 = \eta / ds_1$; e d'altra parte si ha $ds_1 = d\varrho$. Ne risulta, per la determinazione della sviluppata, la coppia di eguaglianze

$$(13) \qquad s_1 = \varrho \;,\quad \operatorname{th} \frac{\varrho_1}{R} = \operatorname{sh} \frac{\varrho}{R} \cdot \frac{d\varrho}{ds}.$$

Così, per esempio, se si prende $\varrho_1 = a$, si vede che l'equazione intrinseca d'una *sviluppante di circolo* è

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\varrho}{2R} = \frac{s}{2R} \operatorname{th} \frac{a}{R};$$

ed in particolare, per $a = \infty$, se si sposta convenientemente l'origine degli archi, si trova che la *sviluppante dell'oriciclo* è rappresentata dall'equazione

$$\varrho = R \log \frac{s + \sqrt{s^2 - R^2}}{R}.$$

Altro esempio. Mediante le (12) si trova facilmente l'equazione d'una *spirale logaritmica*:

$$\operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \sqrt{1 + m^2} \operatorname{th} \frac{ms}{R\sqrt{1 + m^2}}.$$

L'applicazione delle (13) conduce all'equazione della sviluppata

$$(14) \qquad \operatorname{th} \frac{\varrho}{R} = \frac{m}{1 + m^2} \left(1 + m^2 \operatorname{ch}^2 \frac{s}{R} \right) \operatorname{sh} \frac{s}{R},$$

ben diversa da quella della sviluppante. Solo nel piano euclideo le due equazioni coincidono nell'unica $\varrho = ms$. Ed è questo un fatto generale, che cioè le varie proprietà d'una curva euclidea si trovano per così dire distribuite fra curve differenti nel piano non-euclideo. Così, per esempio, se calcoliamo la sottotangente polare p, e la sottonormale polare q, mediante le formole

$$\operatorname{th} \frac{r}{R} = \operatorname{th} \frac{p}{R} \cdot \cos \theta = \operatorname{th} \frac{q}{R} \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

troviamo bensì $q = \varrho$, per la spirale logaritmica, come nel piano euclideo, ma non $p = -s$. Evidentemente la seconda proprietà deve appartenere alla sviluppata della spirale; ed infatti dalla relazione

$$\operatorname{th}\frac{r}{\mathrm{R}} + \operatorname{th}\frac{s}{\mathrm{R}}\cdot\cos\theta = 0\,,$$

ossia $dr/\operatorname{th}\frac{r}{\mathrm{R}} = ds/\operatorname{th}\frac{s}{\mathrm{R}}$, si deduce, integrando,

$$\operatorname{sh}\frac{r}{\mathrm{R}} = m\operatorname{sh}\frac{s}{\mathrm{R}}\,,\quad \text{poi } \cot\theta = -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\operatorname{ch}\frac{s}{\mathrm{R}}\,;$$

quindi, per la seconda condizione (12), si giunge all'equazione

$$\operatorname{th}\frac{\varrho}{\mathrm{R}} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\left(1 + m^2\operatorname{sh}^2\frac{s}{\mathrm{R}}\right)\operatorname{sh}\frac{s}{\mathrm{R}}\,,$$

che non differisce dalla (14), come subito si riconosce cambiando m in $m/\sqrt{1+m^2}$.

Segnaliamo, per finire, l'applicazione che delle (7) si può fare allo studio di qualunque doppio sistema ortogonale di curve. Posta l'origine in un punto qualunque M, si dirigano gli assi secondo le tangenti alle due curve del sistema, incrociantisi in M, e si distingua con l'indice 1 o 2 tutto ciò che si riferisce alla curva tangente all'asse delle u, o all'asse delle v, rispettivamente. Le (7), applicate alle due curve, prendono la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s_1} = \varkappa_1 v - 1 + \dfrac{u^2}{\mathrm{R}^2}\,, & \dfrac{\partial v}{\partial s_1} = -\varkappa_1 u + \dfrac{uv}{\mathrm{R}^2}\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial s_2} = \varkappa_2 v + \dfrac{uv}{\mathrm{R}^2}\,, & \dfrac{\partial v}{\partial s_2} = -\varkappa_2 u - 1 + \dfrac{v^2}{\mathrm{R}^2}\,. \end{cases}$$

Affinchè esista una funzione, della quale sian dati i quozienti differenziali $\partial/\partial s_1$ e $\partial/\partial s_2$, è necessario e sufficiente che da tali quozienti sia soddisfatta una certa relazione

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1\,\partial s_2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2\,\partial s_1} = k_1\frac{\partial}{\partial s_1} + k_2\frac{\partial}{\partial s_2}\,,$$

con k_1 e k_2 dipendenti unicamente dal doppio sistema che si considera. Basta applicare questa condizione ad una delle funzioni u, v, per trovare $k_1 = \varkappa_1$, $k_2 = \varkappa_2$, e giungere inoltre alla relazione

$$\frac{\partial\varkappa_2}{\partial s_1} - \frac{\partial\varkappa_1}{\partial s_2} + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \mathrm{K} = 0\,,$$

che per $\mathrm{K} = 0$ si converte nella nota relazione di Lamé [1], caratteristica del piano euclideo.

[1] *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, pag. 85.