ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Astronomia. — *Osservazioni della nuova cometa 1904 a.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

La cometa fu scoperta a Geneva (U. S. A.) dall'astronomo Brooks il 16 aprile.

Il 17 io la trovai e l'osservai fino ad oggi quattro volte al grande rifrattore col micrometro filare ed amplificazione 120.

L'astro è d'aspetto minuto, con nucleo di 9na a 10ma grandezza e rudimenti di coda.

1904 aprile	17	$9^h45^m38^s$	RCR;	α appar.	$16^h56^m38^s.40$	($9^n.785$);	δ appar.	$44°40'37''.7$	(0.548)
„	„	20 10 24	1 „ ;	„	16 47 58. 00	($9^n.769$);	„	46 33 6. 7	(0.341)
„	„	25 10 50	56 „ ;	„	16 31 40. 96	($9^n.706$);	„	49 27 32. 5	(9.851)
„	„	30 8 19	49 „ ;	„	16 13 32. 03	($9^n.845$);	„	51 58 37. 6	(9.433)

L'astro da lungo tempo passò al perielio, e però va perdendo splendore allontanandosi anche dalla terra. Non è improbabile che un'orbita ellittica a corto periodo sia la reale, ma il saggio di elementi, portoci dall'America, derivato da un intervallo minimo, quantunque assai suggestivo per la sua singolarità, deve essere riguardato come una rozza approssimazione.

Geometria. — *Sulla omologia di due piramidi in un iperspazio.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

Due triangoli di un medesimo piano (e senza vertici comuni) possono essere omologici in un solo modo, oppure in due, o in tre, o in quattro, o in sei modi diversi; invece due tetraedri (non aventi vertici comuni) possono essere omologici o in un sol modo, o in due, o in quattro modi diversi [2].

La domanda:

In quanti modi possono essere omologiche due piramidi di ($di\ n+1$ *vertici*) *appartenenti ad uno spazio* S_n *di* n *dimensioni?*

trova risposta in questa Nota, dove, con un semplicissimo ragionamento geometrico, si dimostra (n. I) che *se* $n > 3$, *due tali piramidi, che non abbiano vertici nè spigoli comuni, possono essere omologiche soltanto in un modo.*

Il caso qui indicato è senza dubbio quello che offre maggior interesse, ed è l'unico che venga considerato nei lavori di mia cognizione dedicati a

[1] Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

[2] Vedasi ad es., anche per citazioni dei lavori precedenti di Rosanes, Schröter, Vályi ed altri, Ed. Hess, *Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder*, Math. Ann., Bd. 28 (1886), pag. 167.

triangoli e a tetraedri omologici: nei quali anzi non solo è sottintesa la restrizione (che ho posto in principio) circa la non esistenza di vertici comuni, ma si sottintende addirittura che i due triangoli o tetraedri siano assolutamente distinti, cioè non abbiano in comune neanche lati, o risp. spigoli nè facce. Ove tali restrizioni si lascino cadere, si riconosce facilmente che le due figure possono corrispondersi anche in omologie diverse da quelle indicate nei citati lavori, ed anche in infinite omologie. Il risultato a cui si giunge (n. II e III) discutendo questi casi (per un valor qualunque di n) è che *se le due piramidi, pure avendo tutti i vertici distinti, hanno in comune uno spigolo, o non sono omologiche in nessun modo, o si corrispondono in due diverse omologie; mentre se hanno vertici comuni, possono essere omologiche in uno, o in due, o in tre, o in quattro, o in sei, o in infiniti modi* (che vengono assegnati per ogni caso).

I.

Le due date piramidi $P \equiv A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ e $P' \equiv A'_1 A'_2 \ldots A'_{n+1}$, senza vertici nè spigoli comuni, si corrispondano in un'omologia Ω di centro O (necessariamente esterno ad ogni spigolo di P e P'), così che siano omologhi A_1 e A'_1, A_2 e A'_2, ... Se è possibile (con $n > 3$), sia Ω' un'altra omologia, di centro O', che trasformi P in P'. Essendo Ω e Ω' distinte, almeno due vertici di P avranno in esse come corrispondenti vertici di P' tra loro diversi.

Non può (qualunque del resto sia n) O' coincidere con O: altrimenti, se A_1 è un vertice di P il cui omologo in Ω' non è A'_1, ma p. es. A'_2, sarebbero allineati (con $O \equiv O'$) i punti A_1, A_2, A'_1, A'_2, cioè coinciderebbero due spigoli di P e P', contro il supposto.

Dico altresì che in Ω' non possono (per $n > 2$) essere corrispondenti due vertici, come A_1 e A'_1, che già si corrispondono in Ω. Invero in tal caso O', al pari di O, starebbe sulla retta $A_1 A'_1$, e, detto A_2 un vertice di P il cui omologo in Ω' non sia A'_2, ma p. es. A'_3, poichè nel piano delle tre rette (distinte) OA_1, OA_2, OA_3 giacciono già i tre vertici A'_1, A'_2, A'_3 di P', l'omologo di A_3 in Ω' non potrebbe essere che A'_2. Ad un quarto vertice A_4 non potrà anche in Ω' corrispondere A'_4, e per $n = 3$ ciò è assurdo. Per $n > 3$, ad A_4 corrisponderà p. es. A'_5, e allora, per una ragione analoga a quella di poc'anzi, ad A_5 corrisponderà A'_4: ma questo è assurdo, poichè il piano delle rette $A_2A'_2$, $A_3 A'_3$ e il piano delle rette $A_4 A'_4$, $A_5 A'_5$, avendo in comune le retta OO', starebbero in un S_3, sicchè starebbero in un S_3 i cinque vertici A_1, A_2, ..., A_5 di P.

Neanche può avvenire che, essendo in Ω' omologo di A_1 p. es. A'_2, l'omologo di A_2 non sia A'_1, ma p. es. A'_3, e l'omologo di A_3 non sia A'_1, ma p. es. A'_4. Tutti questi punti giacerebbero infatti in uno stesso piano (per O e O'), epperò giacerebbero in un piano anche i quattro vertici A_1, A_2, A_3, A_4 di P.

È pure assurdo (per $n > 2$) che a tre vertici A_1, A_2, A_3 di P corrispondano in Ω' risp. i vertici A'_2, A'_3, A'_1 di P' dedotti con una permutazione circolare da quelli che corrispondono ai precedenti in Ω. Infatti, se $n = 3$, ad A_4 dovrebbe anche in Ω' corrispondere A'_4, il che si è dimostrato già impossibile. Per $n > 3$, in quella ipotesi potrà inoltre accadere che ad una coppia A_4, A_5 corrisponda in Ω' la coppia A'_5, A'_4, oppure che ad una seconda terna A_4, A_5, A_6 corrisponda in Ω' la terna A'_5, A'_6, A'_4. Ma nel primo caso le rette $A_1 A'_1$, $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3$ giacerebbero in un piano, e le rette $A_4 A'_4$, $A_5 A'_5$ in un altro, e i due piani, avendo in comune la retta OO', apparterrebbero ad un S_3, sicchè starebbero in un S_3 i cinque vertici A_1, A_2, ..., A_5 di P. Nel secondo caso, osservando che dovrebbero appartenere ad un piano le rette $A_4 A'_4$, $A_5 A'_5$, $A_6 A'_6$, si giungerebbe analogamente all'assurdo che uno stesso S_3 conterrebbe i vertici A_1, A_2, ..., A_6 di P.

Resta dunque da considerare il solo caso che n sia dispari, e i vertici di P si distribuiscano in $\frac{n+1}{2}$ coppie, così che ai vertici A_i, A_j di ciascuna coppia corrispondano in Ω' risp. i vertici A'_j, A'_i. Ora per $n > 3$ (epperò > 4) anche questo è da escludere. Infatti se A_1 e A_2, A_3 e A_4, A_5 e A_6 sono tre di quelle coppie, i tre piani determinati dalle coppie di rette $A_1 A'_1$ e $A_2 A'_2$, $A_3 A'_3$ e $A_4 A'_4$, $A_5 A'_5$ e $A_6 A'_6$, avendo in comune la retta OO', giacerebbero in un S_4, cioè starebbero in un S_4 i sei vertici A_1, A_2, ..., A_6 di P.

Così il teorema enunciato per primo è dimostrato.

II.

Le due piramidi P e P', senza vertici comuni, abbiano ora in comune uno spigolo s. Un'omologia che trasformi P in P' deve avere il centro su s, altrimenti i due vertici di P' posti su s e gli altri due vertici di P' omologhi ai due di P situati su s sarebbero in un piano. Perciò una tale omologia (qualunque sia n) non esiste se la congiungente due vertici di P e P' esterni ad s passa per uno dei vertici posti su s. Escluso questo caso, per $n = 2$ le omologie domandate esistono, mentre per $n > 2$ esistono o no secondo che su s trovasi o no un punto O (che necessariamente sarà unico) allineato con le coppie di vertici di P e P' esterni ad s. Anzi nel primo caso, qualsiasi n, ne esisteranno due (potendosi in due modi diversi far corrispondere tra loro i vertici di P, P' giacenti sopra s), entrambe ben determinate; e non ne esisteranno altre.

III.

Passando finalmente all'ipotesi (con n qualunque) di vertici comuni a P e P', conviene trattare a parte i casi in cui essi siano in numero di $n+1$, n, od $n-1$.

a) Nel primo caso P e P′ costituiscono una sola piramide, e questa è trasformata in sè da infinite omologie: quelle che hanno il centro in un vertice e l'iperpiano nella faccia opposta, e quelle che mutano uno dei vertici in un altro, lasciando fissi i vertici rimanenti.

b) Le richieste omologie sono pure in numero infinito allorchè i vertici comuni siano n: basta infatti far corrispondere l'uno all'altro i due vertici non comuni, prendendo come centro un punto qualunque della loro congiungente r, e come iperpiano d'omologia quello dei vertici comuni. — Oltre a queste, si ha un'altra omologia quando r incontri la congiungente due vertici comuni: questi si corrispondono in essa doppiamente, sicchè l'omologia è armonica. — Se invece r contiene uno dei vertici comuni, si hanno altre infinite omologie, sia ponendo il centro in quest'ultimo e prendendo come omologhi i due vertici non comuni, sia ponendo il centro in un altro punto qualunque di r e facendo corrispondere a quel vertice comune, nell'omologia e nella sua inversa, i due vertici non comuni, e, in entrambi i casi, conducendo l'iperpiano d'omologia per i rimanenti vertici comuni.

c) Se P e P′, essendo omologiche, hanno $n-1$ vertici comuni, i vertici A_1, A_2 di P non comuni a P′ non possono avere entrambi come omologhi vertici comuni: altrimenti le congiungenti queste due coppie di punti omologhi, passando per il centro di omologia, sarebbero in un piano, il quale conterrebbe quindi quattro vertici di P. — Aggiungasi che i quattro vertici non comuni debbono stare in un piano. Ciò è evidente se nell'omologia essi si corrispondono a due a due; ma se anche al solo A_1 corrisponde un vertice non comune A'_1, mentre ad A_2 corrisponde p. es. $A'_2 \equiv A_3$, detto O il centro (situato sulla retta $A_1 A'_1$), sulla OA_2 starà il punto A'_3 omologo di A_3, e questo sarà l'altro vertice di P′ non comune a P.

Se dunque P e P′ sono omologiche, son tali, in generale, in due diverse omologie Ω e Ω': quelle in cui ai due vertici non comuni A_1, A_2 di P corrispondono i due A'_1, A'_2 (oppure A'_2, A'_1) di P′, essendo iperpiano d'omologia per entrambe quello passante per gli $n-1$ vertici comuni e per l'intersezione delle rette $A_1 A_2$, $A'_1 A'_2$ (la quale è certamente esterna all'S_{n-2} dei punti precedenti). — Quando poi (con $n > 2$) la congiungente due vertici comuni A_3, A_4 passi per il centro di Ω o di Ω', si ha una terza omologia, che ha quello stesso centro, e in cui A_3 e A_4 si corrispondono in doppio modo (sicchè l'omologia è armonica), mentre l'iperpiano d'omologia passa per tutti i restanti vertici comuni (si noti che non possono in tal caso altri due vertici comuni essere allineati col centro della seconda omologia, altrimenti sei vertici di P starebbero in un S_4). E una terza omologia si ha pure nel caso, considerato sopra, in cui un vertice comune sia allineato con due vertici non comuni. — Se invece, nel caso generale (qualsiasi n), il centro di Ω o di Ω' coincide con uno dei vertici comuni, il corrispondente iperpiano d'omologia diviene indeterminato, e le cercate omologie sono infinite.

Fin qui si è implicitamente supposto che tre dei quattro vertici non comuni non siano mai in linea retta. Se tre soli stanno sopra una retta r, P e P′ non possono essere omologiche; ma se anche il quarto giace su r, le omologie richieste sono infinite, poichè i vertici comuni devono tutti necessariamente essere uniti e il centro è un punto da scegliersi ad arbitrio su r, dopo di che l'iperpiano d'omologia resta determinato (in due modi).

Rimane ormai soltanto da discutere l'ipotesi che P e P′ abbiano in comune k vertici, essendo $1 \leq k < n - 1$, sicchè almeno tre vertici di P non apparterranno a P′ e sarà $n \geq 3$. Considerando anzitutto il caso in cui uno dei vertici comuni si possa assumere come centro di omologia, gli altri $k - 1$ saranno uniti, ed i non comuni si corrisponderanno a due a due sopra $n - k + 1$ rette per il centro. L'iperpiano d'omologia, dovendo passare per quei $k - 1$ vertici comuni, e per l'S_{n-k-1} in cui si tagliano i due S_{n-k} individuati dai rimanenti vertici di P e dai rimanenti di P′, è indeterminato. Queste omologie sono dunque in numero infinito, e all'infuori di esse non ne esistono altre che mutino P in P′.

Escluso questo caso, un'omologia Ω, che trasformi P in P′, o fa corrispondere ad uno dei vertici non comuni uno di quelli comuni, o fa corrispondere tra loro a due a due i vertici non comuni.

Nella prima ipotesi, se al vertice A_1 di P, non appartenente a P′, corrisponde in Ω un vertice comune $A'_1 \equiv A_2$, l'omologo A'_2 di A_2 sta sulla retta $A_1 A_2$ e non è un vertice di P. I rimanenti vertici comuni sono uniti, e i non comuni si corrispondono a due a due, non esistendone più di una coppia sopra una retta uscente dal centro. L'omologia risulta pienamente individuata: ma se ne ha una seconda, che pure muta P in P′, facendo corrispondere A'_2 ad A_1, assumendo $A'_1 \equiv A_2$ come unito, e mantenendo inalterate tutte le altre precedenti condizioni.

Nella seconda ipotesi, i vertici non comuni (tra loro corrispondenti in Ω) di P e P′ sono a due a due allineati col centro O, e i vertici comuni sono tutti uniti, sicchè Ω risulta individuata. Ma se due di questi ultimi sono in linea retta con O, essi possono anche farsi corrispondere tra loro in doppio modo, e si ottiene una seconda omologia (armonica) che muta P in P′. E una seconda omologia si ha pure quando sopra una stessa retta per O giacciano due coppie di vertici non comuni; oppure quando sulla congiungente due vertici non comuni omologhi in Ω stia uno dei vertici comuni (è questo il caso che già si è incontrato esaminando la prima ipotesi). — In questi due ultimi casi particolari non esistono altre omologie atte a cambiare P in P′. Nel caso generale, in cui le coppie $A_1, A'_1; \ldots; A_{n-k+1}, A'_{n-k+1}$ di vertici (non comuni) omologhi in Ω sono allineate con O, se si hanno altre di quelle omologie, devono lasciar fisso ciascuno dei vertici comuni, e trasformare la piramide $Q \equiv A_1 A_2 \ldots A_{n-k+1}$ nella piramide $Q' \equiv A'_1 A'_2 \ldots A'_{n-k+1}$. Ciò esige anzitutto che Q e Q′ stiano in un medesimo S_{n-k}: in caso contrario

infatti uno spigolo qualunque di Q taglierebbe i due spigoli, che gli corrispondono in Ω e nell'altra omologia, in uno stesso punto dell'S_{n-k-1} comune ai due S_{n-k} individuati dai vertici di Q e di Q', sicchè quattro vertici di Q' starebbero in un piano. E poichè Q e Q' non hanno nè vertici nè spigoli comuni, per ciò che si è dimostrato in I dovrà $n-k+1$ avere uno dei valori 3, 4, cioè sarà $k=n-2$, oppure $k=n-3$. Effettivamente possono esistere, oltre ad Ω, nel primo caso una, due, tre, o cinque di quelle omologie (Rosanes, Schroeter), e nel secondo caso una o tre (Vályi). — Neanche qualcuna di queste nuove omologie può aversi nel primo caso particolare sopra considerato, in cui O è in linea retta con due dei vertici comuni a P, P': invero per $k=n-2$ si richiede che Q e Q' siano in un piano per O, e per $k=n-3$ che siano in un S_3 per O, sicchè P avrebbe cinque vertici in un S_3, o rispettivamente sei vertici in un S_4.

Matematica. — *Alcuni teoremi di calcolo infinitario.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Socio U. Dini.

Studiando il quesito della determinazione dell'ordine di infinito per funzioni reali dei punti di un insieme numerabile, ho rinvenuto alcuni teoremi, dai quali immediatamente si deducono proprietà importanti di funzioni non necessariamente continue della variabile continua x, e che, nel caso di funzioni continue e derivabili, permettono uno studio più profondo, delle relazioni fra il comportamento assintotico del quoziente di due funzioni e quello delle derivate, di quel che si possa fare coi metodi ordinarî.

Scrivo qui gli enunciati di alcuni fra i teoremi che ho ritrovati su cotesto argomento, la cui dimostrazione è fondata sulle proposizioni contenute nella Memoria *Sui prodotti infiniti e le serie a termini positivi*, che si sta ora stampando nel fascicolo in corso dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

1. Indichi $[x_n]$ un insieme numerabile di punti, dati in modo qualunque nel piano della variabile complessa, e siano $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, funzioni reali, finite, ad un valore per ogni valore finito di n. La $\varphi(x_n)$ tenda, per $n=\infty$, all'infinito sempre crescendo, e la $f(x_n)$ sia monotona.

Poniamo

$$\Delta f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)\ ,\ \Delta\varphi(x_n)=\varphi(x_{n+1})=\varphi(x_n)\,.$$

I. *Se il quoziente* $\dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è monotono, per tutti i valori di* n *maggiori di un determinato numero* N, *ed è infinito (infinitesimo) per* $n=\infty$,