ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

infatti uno spigolo qualunque di Q taglierebbe i due spigoli, che gli corrispondono in Ω e nell'altra omologia, in uno stesso punto dell'S_{n-k-1} comune ai due S_{n-k} individuati dai vertici di Q e di Q', sicchè quattro vertici di Q' starebbero in un piano. E poichè Q e Q' non hanno nè vertici nè spigoli comuni, per ciò che si è dimostrato in I dovrà $n-k+1$ avere uno dei valori 3, 4, cioè sarà $k=n-2$, oppure $k=n-3$. Effettivamente possono esistere, oltre ad Ω, nel primo caso una, due, tre, o cinque di quelle omologie (Rosanes, Schroeter), e nel secondo caso una o tre (Vályi). — Neanche qualcuna di queste nuove omologie può aversi nel primo caso particolare sopra considerato, in cui O è in linea retta con due dei vertici comuni a P, P': invero per $k=n-2$ si richiede che Q e Q' siano in un piano per O, e per $k=n-3$ che siano in un S_3 per O, sicchè P avrebbe cinque vertici in un S_3, o rispettivamente sei vertici in un S_4.

Matematica. — *Alcuni teoremi di calcolo infinitario.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Socio U. Dini.

Studiando il quesito della determinazione dell'ordine di infinito per funzioni reali dei punti di un insieme numerabile, ho rinvenuto alcuni teoremi, dai quali immediatamente si deducono proprietà importanti di funzioni non necessariamente continue della variabile continua x, e che, nel caso di funzioni continue e derivabili, permettono uno studio più profondo, delle relazioni fra il comportamento assintotico del quoziente di due funzioni e quello delle derivate, di quel che si possa fare coi metodi ordinarî.

Scrivo qui gli enunciati di alcuni fra i teoremi che ho ritrovati su codesto argomento, la cui dimostrazione è fondata sulle proposizioni contenute nella Memoria *Sui prodotti infiniti e le serie a termini positivi*, che si sta ora stampando nel fascicolo in corso dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

1. Indichi $[x_n]$ un insieme numerabile di punti, dati in modo qualunque nel piano della variabile complessa, e siano $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$, funzioni reali, finite, ad un valore per ogni valore finito di n. La $\varphi(x_n)$ tenda, per $n=\infty$, all'infinito sempre crescendo, e la $f(x_n)$ sia monotona.

Poniamo

$$\Delta f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)\ ,\ \Delta\varphi(x_n)=\varphi(x_{n+1})=\varphi(x_n)\,.$$

I. *Se il quoziente* $\dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è monotono, per tutti i valori di* n *maggiori di un determinato numero* N, *ed è infinito (infinitesimo) per* $n=\infty$, *anche il quoziente* $\dfrac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)}$ *delle differenze finite, è infinito (infinitesimo) di ordine non minore.*

II. *Se il quoziente* $\dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è monotono ed ha per* $n=\infty$, *limite determinato, finito e diverso dallo zero,* λ, *affermeremo che anche il quoziente delle differenze finite tende allo stesso limite, se sarà monotona la funzione*

$$f(x_n)-\lambda\varphi(x_n).$$

III. *Se il doppio rapporto* $\dfrac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)}:\dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *per tutti gli* $n\geqq \mathrm{N}$ *si mantiene maggiore di un numero maggiore di* 1, *il quoziente* $\dfrac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è infinito e determinato per* $n=\infty$; *se invece si mantiene positivo, ma minore di un numero minore di* 1, *il quoziente delle funzioni è infinitesimo.*

IV. Si ponga

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)}=1+a_n\\ &\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)}:\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}=1+b_n,\\ &\beta_n=\frac{\lg\left(1+\dfrac{a_n b_n}{1+a_n}\right)}{\lg(1+a_n)}\end{aligned}\right.$$

Se esiste il limite

$$\beta=\lim_{n=\infty}\beta_n,$$

ed è ε *un numero positivo dato a piacere, l'ordine di infinito della funzione* $f(x_n)$, *per* $n=\infty$, *è minore di quello della variabile* $\{\varphi(x_n)\}^{1+\beta+\varepsilon}$, *maggiore di quello della variabile* $\{\varphi(x_n)\}^{1+\beta-\varepsilon}$.

Seguendo le idee di Cauchy (1) *potremo anche dire: se si assume come infinito principale quello della variabile* $\varphi(x_n)$, *l'ordine di infinito della* $f(x_n)$ *è dato dal numero* $1+\beta$.

V. *Se la variabile* $\varphi(x_n)$, *il cui infinito si assume come principale, soddisfa la relazione:*

$$\lim_{n=\infty}\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)}=1,$$

si ha

$$1+\beta=\lim_{n=\infty}\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)}:\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

e cioè *l'ordine d'infinito, al senso chiarito superiormente, della* $f(x_n)$, *si ottiene cercando il limite del doppio rapporto* $\dfrac{\Delta f}{\Delta\varphi}:\dfrac{f}{\varphi}$.

(1) *Œuvres*, t. IV della 2a serie, pag. 281.

VI. *Anche se la* β_n *non ha limite, l'ordine di infinito della* $f(\varphi_n)$, *relativamente alla* $\varphi(x_n)$, *è situato fra i limiti superiore ed inferiore di indeterminazione della variabile* $1+\beta_n$.

VII. *Se il doppio rapporto* $\frac{\Delta f(x_n)}{\Delta\varphi(x_n)} : \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$ *è infinito (infinitesimo) per* $n=\infty$, *l'ordine di infinito della* $f(x_n)$ *è superiore (inferiore) a quello di qualunque potenza reale positiva della* $\varphi(x_n)$.

2. Le proposizioni enunciate si applicano immediatamente a funzioni reali della variabile reale x, e danno le relazioni fra il comportamento assintotico del quoziente di due funzioni e quello delle differenze finite. Tali relazioni non richiedono la continuità delle funzioni che si considerano e sono indipendenti dall'accrescimento finito $h=x_{n+1}-x_n$, della variabile.

3. È facile vedere come esse si modifichino quando si abbia a che fare con funzioni derivabili e si supponga h infinitesimo: enuncierò solo la proposizione seguente che mi pare notevole:

Sieno $f(x)$, $\varphi(x)$ *funzioni reali della variabile reale* x, *finite, ad un valore e derivabili in tutti i punti di un intorno* $(x_0 \ldots +\infty)$.

La $\varphi(x)$ *sia ivi sempre crescente ed infinita per* $x=+\infty$, *la* $f(x)$ *sia infinita e determinata per* $x=+\infty$.

Se il doppio rapporto:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

è positivo nei punti $(x \ldots +\infty)$ *ed ha, per* $x=+\infty$, *limite determinato* λ, *sarà* λ *l'ordine d'infinito (al senso di Cauchy) della* $f(x)$ *quando per infinito principale si assuma quello delle* $\varphi(x)$.

Se quel doppio rapporto ha limiti inferiore e superiore di indeterminazione l, L, *l'ordine di infinito (al senso detto superiormente) della* $f(x)$ *sarà compreso fra* l, *ed* L.

Aggiungeremo che: *Se il doppio rapporto* $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$ *è maggiore di* 1, *in tutti i punti a distanza finita di un intorno* $(x_0 \ldots +\infty)$, *il quoziente* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *è sempre crescente, se minore di* 1, *decrescente.*

4. Come applicazione di cotesto teorema si calcolerà l'ordine d'infinito di una data funzione, quando l'infinito principale sia quello della x, cercando il limite del prodotto della x stessa per la derivata logaritmica della funzione data;

quando si assuma come infinito principale quello della e^x, cercando il limite, per $x=\infty$, della derivata logaritmica;

quando per infinito principale si assuma quello della x^x, cercando il limite del quoziente della derivata logaritmica per $\lg x$, ecc.