ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Fisica matematica. — *Sulla teoria matematica della circolazione atmosferica.* Nota di LUIGI DE-MARCHI, presentata dal Corrispondente G. RICCI [1].

1. Siano

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} + h\Delta_2 u + 2\varepsilon v = 0 \\
(1)\qquad &\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} + h\Delta_2 v - 2\varepsilon u = 0 \\
&\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} = h\Delta_2 w = 0
\end{aligned}
$$

le equazioni di moto di un fluido con attrito, riferito a un sistema di assi rotante con velocità angolare ε intorno all'asse delle z, e in cui possano ritenersi trascurabili le accelerazioni, condizione che si verifica con grande approssimazione nei movimenti più generali dell'atmosfera.

La $\mathfrak{T}$ è definita dalla differenza $V - \Pi$ fra il potenziale d'attrazione e il potenziale di pressione $\int \frac{dp}{\mu}$ (ove μ sia la densità) quando la p possa considerarsi come funzione della sola μ; oppure, con opportune trasformazioni di Oberbeck [2], può esprimersi col trinomio

$$b^2 \tau - c^2 \nu + h\theta$$

ove b^2, c^2 possono considerarsi, entro lo strato atmosferico, come costanti; τ è l'anomalia di temperatura definita da

$$\tau = \mathrm{T} - \mathrm{T}_r$$

dove T_r è funzione del solo raggio vettore r; ν è l'anomalia relativa di pressione definita da

$$p = p_1(1 + \nu)$$

ed esprimente quei cambiamenti di pressione che sono dovuti al movimento; h è il coefficiente d'attrito interno riferito all'unità di massa; θ è la dilatazione cubica.

Dividendo le (1) per $\varrho = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2}$, distanza di un punto, in cui si vuol determinare il moto, da un elemento generico della massa atmosferica, e integrando su tutta la massa stessa, si viene pel

(1) Presentata nella seduta del 24 aprile 1904.

(2) *Bewegungs-erschein. d. Atmosph.* I. Sitzungsber. Berlin, 1888, I. Halbb.

teorema di Green [1] a isolare le u, v, w espresse come una somma di potenziali e derivati di potenziali. Ogni termine di questa somma esprime una componente di velocità dovuta a un particolare elemento fisico o dinamico.

2. La componente indotta dalla rotazione terrestre è espressa dalle componenti secondo gli assi

$$(2) \qquad u_r = \frac{\varepsilon}{2\pi h}\int v_1 \frac{dS}{\varrho} \qquad v_r = -\frac{\varepsilon}{2\pi h}\int u_1 \frac{dS}{\varrho} \qquad w_r = 0$$

dove le u_1, v_1 esprimono le componenti nel piano del parallelo della velocità in un punto qualunque dello spazio S occupato dall'atmosfera.

Questa componente V_r della velocità totale V forma con questa l'angolo γ definito da

$$V\, V_r \cos\gamma = u\, u_r + v\, v_r = \frac{\varepsilon}{2\pi h}\int (u v_1 - v u_1)\frac{dS}{\varrho}\,.$$

Il binomio $uv_1 - u_1 v$ nell'immediato intorno del punto considerato è nullo; ma noi potremo considerarlo come assai piccolo per tutto lo spazio S presupponendo come postulato che ovunque (salvo in punti, linee e superficie determinate) predomini la componente lungo il parallelo su quella lungo il meridiano. Tale postulato apparisce tanto più legittimo quanto più libero è il movimento, cioè quanto più i punti sono elevati nell'atmosfera, dove meno sensibili sono le perturbazioni locali dovute alla temperatura e all'attrito esterno ed interno. Allora, infatti, è valido con molta approssimazione il teorema delle aree, pel quale ogni moto lungo il meridiano deve assumere dopo breve cammino una forte deviazione verso Est (nell'emisfero boreale).

Noi ammetteremo quindi per approssimazione

$$u\, u_r + v\, v_r = 0$$

cioè

$$(3) \qquad -\frac{u}{v_r} = \frac{v}{u_r} = \frac{V}{V_r} = k$$

dove k sarà in generale una funzione di x, y, z, che dobbiamo ritenere ovunque piuttosto piccola, perchè la componente di deviazione V_r basta a deviare il movimento dalla sua direzione iniziale di un angolo assai prossimo al retto, e dev'essere quindi grandissima. Poichè, inoltre, il moto si suppone variare assai lentamente da punto a punto sia in grandezza (accelerazione nulla) sia in direzione (predominio della componente secondo il parallelo), la k potrà ritenersi approssimativamente come costante in un

[1] Vedi le mie *Note di Meteorologia matematica* in Rendic. Istit. Lomb., 1902.

intorno abbastanza vasto del punto considerato. Essa finalmente è positiva, perchè il moto è deviato verso destra (sull'emisfero boreale). Allora dalle (2) si ricava

$$(4)\qquad \Delta_2 u + \frac{2\varepsilon k}{h} u = 0 \qquad \Delta_2 v + \frac{2\varepsilon k}{h} v = 0 .$$

Queste due equazioni esprimono le ipotesi semplificatrici introdotte, cioè la quasi normalità di V_r a V e la costanza di k, e possono sostituirsi, date tali ipotesi, a due delle equazioni del moto.

Poniamo per analogia

$$(5)\qquad \Delta_2 w + \frac{2\varepsilon k}{h} w = 0$$

e vediamo quale significato dinamico abbiano le ipotesi rappresentate dalle (4) (5). Le equazioni del moto diventano

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} - 2\varepsilon(ku - v) = 0 \\ &\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} - 2\varepsilon(kv + u) = 0 \\ &\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z} - 2\varepsilon kw = 0 . \end{aligned}$$

Esse ci dicono anzitutto che *l'attrito interno si esplica come un attrito esterno*, il che si può intendere (secondo i concetti di Helmholtz) nel senso che l'energia perduta sia principalmente impiegata a creare dei vortici ([1]).

Eliminando inoltre la $\mathfrak{T}$ e indicando con ξ, η, ζ le componenti della rotazione.

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) , \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) , \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

e con ξ_r, η_r, ζ_r le analoghe componenti della rotazione nel moto V_r, si ha

$$\begin{aligned} 2\xi &= -\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = 2\xi_r \\ 2\eta &= \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial u_r}{\partial z} = 2\eta_r \\ 2\zeta &= \frac{1}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u_r}{\partial y} - \frac{\partial v_r}{\partial x}\right) = 2\zeta_r \end{aligned}$$

([1]) Arrhenius, *Lehrb. d. Kosm. Physik*, pag. 679. Anche il Sandström (ibid. pag. 740) assume tale semplificazione dell'attrito interno in esterno. Quì ne vediamo il significato cinematico e definiamo il sistema di movimenti che essa determina.

cioè *la rotazione del moto reale è esclusivamente quella indotta dalla rotazione terrestre*, o, in altre parole, la circolazione convettiva dell'atmosfera non ammette potenziale di moto solo perchè è perturbata dalla rotazione terrestre.

3. Rimane a vedere quali condizioni le ipotesi assunte impongano alla $\mathfrak{T}$. Le equazioni (6) possono scriversi sotto la forma

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
u &= \frac{k}{2\varepsilon(1+k^2)}\left\{\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} + \frac{1}{k}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\right\} \\
v &= \frac{k}{2\varepsilon(1+k^2)}\left\{\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} - \frac{1}{k}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\right\} \\
w &= \frac{1}{2\varepsilon k}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Perchè le equazioni generali del moto (1) siano soddisfatte identicamente da queste espressioni di u, v, w, la $\mathfrak{T}$ deve soddisfare alle tre condizioni

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon h}{h}\mathfrak{T}\right) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon k}{h}\mathfrak{T}\right) = 0\,,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon k}{h}\mathfrak{T}\right) = 0
$$

che si riducono, a meno di una costante aggiuntiva alla $\mathfrak{T}$, all'unica

$$
(8) \qquad \Delta_2 \mathfrak{T} + \frac{2\varepsilon k}{h}\mathfrak{T} = 0\,.
$$

È facile vedere come questa condizione non sia soltanto necessaria, ma anche sufficiente perchè le (7) soddisfacciano identicamente le equazioni del moto, e possano quindi sostituirsi a queste le (4) (5), dalle quali le (7) derivano.

Tutte le funzioni incognite del problema sono quindi integrali della sola equazione differenziale

$$
(9) \qquad \Delta_2 f + a^2 f = 0 \qquad \left(a^2 = \frac{2\varepsilon k}{h}\right)
$$

già integrata in molti altri problemi di Fisica matematica. Non sono però integrali indipendenti, in quanto le u, v, w sono esprimibili colla $\mathfrak{T}$ mediante le (7); basta quindi determinare un solo integrale dell'equazione (9).

4. Supponendo eseguite le integrazioni, dalle espressioni di u, v, w si deducono le componenti relative alla superficie della terra, verticale verso

l'alto (V), meridiana verso nord (N) e parallela verso est (E) colle formole

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} &= (u \cos\varphi + v \operatorname{sen}\varphi) \operatorname{sen}\vartheta + w \cos\vartheta \\
\mathrm{N} &= -(u \cos\varphi + v \operatorname{sen}\varphi) \cos\vartheta + w \operatorname{sen}\vartheta \\
\mathrm{E} &= -u \operatorname{sen}\varphi + v \cos\varphi
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ove ϑ è la colatitudine, φ la longitudine est contata da un meridiano iniziale.

Noi supponiamo una distribuzione simmetrica intorna all'asse e rispetto all'equatore, per la quale V, N, E debbono essere indipendenti da φ, e per la quale ai valori ϑ e $\pi - \vartheta$ della colatitudine debbono corrispondere valori eguali per V ed E, valori eguali ma di segno contrario per N.

Trasformiamo analogamente le equazioni del moto (6) in coordinate polari mediante le formole di trasformazione

$$
x = r \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi \qquad y = r \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \qquad z = r \cos\vartheta .
$$

Notando che per la simmetria dev'essere pure $\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\varphi} = 0$, si ha

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta} + 2\varepsilon k \mathrm{N} + 2\varepsilon \mathrm{E} \cos\vartheta = 0 \\
&k\mathrm{E} + \mathrm{V} \operatorname{sen}\vartheta - \mathrm{N} \cos\vartheta = 0 \\
&\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial r} - 2\varepsilon k \mathrm{V} + 2\varepsilon \mathrm{E} \operatorname{sen}\vartheta = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

donde si ricavano

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon(1+k^2)\,\mathrm{V} &= -\frac{1}{k} \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta} + \left(k + \frac{\cos^2\vartheta}{k}\right) \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial r} \\
2\varepsilon(1+k^2)\,\mathrm{N} &= \frac{1}{k} \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial r} + \left(k + \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{k}\right) \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta} \\
2\varepsilon(1+k^2)\,\mathrm{E} &= -\left(\cos\vartheta \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\vartheta} + \operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial r}\right)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

che equivalgono alle (7) espresse in coordinate polari.

5. L'integrale generale della (9) è

$$
f = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{R}_n \sum_{s=0}^{s=n} (\mathrm{C}_s \cos s\varphi + \mathrm{D}_s \operatorname{sen} s\varphi)\, \Theta_{ns}
\tag{13}
$$

ove C_s, D_s sono due costanti,

$$R_n = a_n z^n \left\{1 - \frac{a^2 r^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots\dots \right\}$$
$$+ \frac{b_n}{z^{n+1}} \left\{1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{r^4} \dots\dots \right\}$$

essendo pure a_n, b_n delle costanti, ed r il raggio vettore dal centro della terra,

$$\Theta_{ns} = \operatorname{sen}^s \vartheta \left\{ \cos^{n-s} \vartheta - \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-s-2} \vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-s)\dots\dots(n-s-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-s-4} \vartheta - \dots\dots \right\}.$$

Per la simmetria del sistema rispetto all'asse terrestre la $\mathfrak{T}$, che è uno di questi integrali, dev'essere indipendente da φ; debbono quindi essere nulli tutti i coefficienti C_s, D_s per s diverso da 0. Per la simmetria rispetto all'equatore la $\mathfrak{T}$ deve contenere inoltre soltanto potenze pari di $\cos \vartheta$, deve essere cioè della forma

$$\mathfrak{T} = \sum_{m=0}^{m=\infty} R_{2m} \left\{ \cos^{2m} \vartheta - \frac{2m(2m-1)}{2(4m-1)} \cos^{2m-2} \vartheta + \dots\dots \right\}.$$

È facile vedere come questa posizione soddisfaccia, in base alle (12) anche alle condizioni di simmetria necessaria per V, N, E.

Il problema è quindi analiticamente risolto per ogni regione dell'atmosfera entro la quale la k, e quindi la a^2, possano considerarsi come costanti, e se ne conosca il valore. In altra comunicazione vedremo che queste due condizioni si verificano nello strato d'aria a contatto colla terra.

Ma la forma degli integrali non varia col variare continuo, ma lentissimo, di k, cioè col passaggio da una regione all'altra; essi ci esprimono quindi il sistema dei movimenti in tutta l'atmosfera.

Fisica. — *Sui raggi di Blondlot*. Nota di E. Salvioni, presentata dal Socio A. Ròiti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.