# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XIII.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 maggio 1904.*

P. Villari, Presidente.

## MEMORIE E NOTE

### DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sugli sviluppi assintotici e le serie sommabili.* Nota del Socio S. Pincherle.

Questa breve Nota si propone di mostrare, in modo assai elementare ed adatto didatticamente, quale stretto legame interceda fra il concetto di serie sommabile (esponenzialmente) del Borel e quello di sviluppo assintotico dovuto al Poincaré; di notare come il primo concetto si estenda spontaneamente al caso in cui la funzione associata del Borel, o generatrice, non sia analitica, purchè ammetta lungo l'asse reale positivo le derivate di tutti gli ordini; infine, di osservare come, negli stessi casi e cioè anche senza l'analiticità della funzione generatrice, si presentino sviluppi precedenti per i fattoriali ed aventi il carattere assintotico.

1. Sia $\alpha(t)$ una funzione della variabile reale $t$, che ammetta, per tutti i valori positivi della variabile, la prima derivata $\alpha'(t)$; di più, per i valori di $x$ la cui parte reale supera un numero assegnato $a$ [1] (scriveremo $\mathrm{R}(x) > a$),

[1] È noto, per dimostrazioni date dal Borel, dal Phragmén, dal Franel e dal Lerch, che se un'integrale della forma (1) è convergente per $x = x_0$, esso è convergente e rappresenta un ramo regolare di funzione analitica per tutti i valori di $x$ tali che sia $\mathrm{R}(x) > \mathrm{R}(x_0)$.

siano convergenti i due integrali:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{a}(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\alpha(t)\,dt\,,$$

e

$$\text{(1')} \qquad \alpha_1(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\alpha'(t)\,dt.$$

Essendo $m, k$ due numeri positivi si ha, integrando per parti:

$$\int_m^{m+k} e^{-xt}\,\alpha(t)\,dt = -\frac{1}{x}\left(e^{-xt}\,\alpha(t)\right)_m^{m+k} + \frac{1}{x}\int_m^{m+k} e^{-xt}\,\alpha'(t)\,dt\,;$$

ora, dall'ipotesi delle convergenze degli integrali (1), (1'), risulta che tenuto fisso $x$, con $\mathrm{R}(x) > a$, e preso $\varepsilon$ piccolo a piacere, si potrà determinare $m$ abbastanza grande perchè sia, per ogni valore di $k$:

$$\left|\left(e^{-xt}\,\alpha(t)\right)_m^{m+k}\right| < \varepsilon.$$

Ciò porta alla conseguenza

$$\lim_{t=\infty} e^{-xt}\,\alpha(t) = 0\,,$$

e quindi « dall'ipotesi della convergenza di (1) ed (1') per $\mathrm{R}(x) > a$ risulta, « per gli stessi valori di $x$, la convergenza assoluta ed uniforme per il primo di questi integrali ».

2. Aggiungendo l'ipotesi delle convergenza di

$$\mathrm{a}_2(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\alpha''(t)\,dt\,,$$

risulterà parimente la convergenza assoluta ed uniforme di (1'), e quindi sarà, per $\mathrm{R}(x) > a$ ed $h$ positivo:

$$\text{(2)} \qquad \int_0^\infty \left|e^{-(x+h)t}\,\alpha'(t)\right|dt < \int_0^\infty \left|e^{-xt}\,\alpha'(t)\right|dt.$$

Sia $\alpha(t)$ finito per $t = 0$; l'integrazione per parti di (1) ci dà:

$$\mathrm{a}(x) = \frac{\alpha(0)}{x} + \frac{1}{x}\,\mathrm{a}_1(x),$$

onde, per la (2):

$$|\mathrm{a}(x+h)| < \frac{1}{|x+h|}\,\alpha(0) + \int_0^\infty \left|e^{-xt}\,\alpha'(t)\right|dt\,.$$

Facendo ora tendere $h$ all' infinito, $\mathrm{a}(x+h)$ tende a zero, del primo ordine almeno; e quindi « $\mathrm{a}(x)$ tende a zero del primo ordine almeno quando « $x$ tende all' infinito nel senso dell'asse reale e positivo ».

3. Poniamo ora:

$a)$ « che la funzione $\alpha(t)$ abbia, fra 0 e $+\infty$, le derivate di tutti « gli ordini $\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots \alpha^{(n)}(t), \ldots$;

$b)$ « che le $\alpha^{(n)}(t)$ abbiano valor finito per $t=0$; porremo

$$\alpha^{(n)}(0)=k_n, \qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

$c)$ « che per i valori di $x$ tali che sia $\mathrm{R}(x)>a$, siano convergenti « tutti gli integrali

$$\mathrm{a}_n(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\,\alpha^{(n)}(t)\,dt \text{ ».} \tag{1*}$$

Ne risulterà, per i §§ 1 e 2, che per quei valori di $x$ si avrà

$$\lim_{t=\infty} e^{-xt}\,\alpha^{(n)}(t)=0, \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

e quindi che per $\mathrm{R}(x)>a$ tutti gl' integrali (1*) convergeranno uniformemente ed assolutamente; inoltre, dall' integrazione per parti, verrà

$$\mathrm{a}_n(x)=\frac{k_n}{x}+\frac{1}{x}\,\mathrm{a}_{n+1}(x), \qquad (n=0,1,2,\ldots); \tag{3}$$

infine, le $\mathrm{a}_n(x)$ tenderanno a zero, del prim'ordine almeno, quando $x$ tenda all' infinito nel senso dell'asse reale positivo.

4. La relazione (3) conduce facilmente al primo dei risultati che ci proponevamo di ottenere. Infatti da codeste relazioni si ricava

$$\mathrm{a}(x)=\frac{k_0}{x}+\frac{k_1}{x^2}+\cdots+\frac{k_n}{x^{n+1}}+\frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{a}_{n+1}(x),$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty} x^{n+1}\left(\mathrm{a}(x)-\frac{k_0}{x}-\frac{k_1}{x^2}-\cdots-\frac{k_n}{x^{n+1}}\right)=\lim_{x=\infty}\mathrm{a}_{n+1}(x)=0, \tag{4}$$

intendendo che $x$ tenda all' infinito nel senso indicato.

Ora, se la serie

$$\sigma(x)=\sum_0^\infty \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

è convergente, la (4) esprime che, nel campo di convergenza di questa serie, essa rappresenta la funzione a$(x)$, che pertanto è regolare nell'intorno di $x=\infty$. Invece, se la $\sigma(x)$ è divergente, la (4) esprime appunto che la serie $\sigma(x)$, secondo la definizione dovuta al Poincaré [1], è lo sviluppo assintotico di a$(x)$. « Ogni funzione determinante (1), per la quale siano soddisfatte le condizioni poste al § 3, ammette dunque uno sviluppo in serie « di potenze intere negative di $x$, effettivo od assintotico ».

5. Non si è supposto fin qui l'analiticità della funzione $\alpha(t)$, generatrice della funzione determinante a$(x)$. Qualora $\alpha(t)$ sia analitica, e regolare entro un cerchio di centro $t=0$, ove essa ammetta lo sviluppo

$$\alpha(t)=\Sigma\frac{k_n t^n}{n!}\,, \tag{5}$$

questo sviluppo sarà, per la serie $\sigma(x)$, quello che il Borel chiama *associato* [2]. Ora, basta il cambiamento di $t$ in $\frac{t}{x}$ nell'integrale (1) per mostrare come questo integrale dia precisamente la *somma generalizzata* [3] della serie $\sigma(x)$, se divergente. Ma non è affatto necessario di supporre la convergenza della serie (5) [4]; basta di limitarsi alle ipotesi del § 3, le quali non richiedono neppure che $\alpha(t)$ sia analitica ed esista fuori dell'asse reale, per potere concludere che « sotto le ipotesi del § 3 per la funzione « generatrice, la funzione determinante è rappresentata dalla serie $\sigma(x)$ in « quanto ne è la somma generalizzata, ed in quanto la serie stessa ne dà lo « sviluppo assintotico ».

6. Riferendoci alla definizione di serie *assolutamente sommabile*, si vede come essa sia stata ora estesa; infatti, non importa più che intervenga la serie associata: basta, data la serie divergente $\sigma(x)$, che i suoi coefficienti $k_0, k_1, \ldots k_n, \ldots$ siano i valori, per $t=0$, di una funzione $\alpha(t)$ definita insieme alle sue derivate per tutti i valori positivi di $t$, in modo che siano soddisfatte le condizioni del § 3, per poter concludere all'esistenza della sommabilità e della proprietà assintotica di $\sigma(x)$.

7. Abbiasi l'integrale

$$\mathrm{b}(x)=\int_0^1 u^{x-1} f(u)\,du\,, \tag{6}$$

[1] Acta Math., T. VIII, pag. 296.

[2] All'infuori del cambiamento, nelle $\sigma(x)$, di $x$ in $\frac{1}{x}$.

[3] Inoltre $\sigma(x)$ è *assolutamente sommabile*. V. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, pag. 99 (Paris, Gauthier-Villars, 1901).

[4] Il Borel avverte (loc. cit., nota a pie' della pag. 99) che si potrebbe estendere la teoria della sommabilità anche al caso che non sia convergente la serie associata.

e si consideri insieme a questo

$$\mathrm{b}_1(x) = \int_0^1 u^{x-1} f'(u)\, du .$$

Se $f(u)$, $f'(u)$ sono tali che gl' integrali (6) e (6') siano convergenti, il primo per $\mathrm{R}(x) > a$ [1], il secondo per $\mathrm{R}(x) > a + 1$, si può vedere, con dimostrazione perfettamente simile a quella del § 1, che per $\mathrm{R}(x) > a$ è

$$\lim_{u=0} u^x f(u) = 0 ;$$

onde, per quei valori di $x$, l' integrale (6) è assolutamente ed uniformemente convergente. Di più, aggiungendo l' ipotesi della convergenza di

$$\mathrm{b}_2(x) = \int_0^1 u^{x+1} f''(u)\, du$$

per $\mathrm{R}(x) > a + 2$, si vede, con dimostrazione del tutto analoga a quella del paragrafo 2, che $\mathrm{b}(x)$ tende a zero, del primo ordine almeno, se $x$ tende all' infinito nel senso dell'asse reale e positivo.

8. Ora sia dato l' integrale (1) in cui siano soddisfatte le ipotesi del paragrafo 3; ponendo in questo e in (1')

$$t = -\log u \ , \ \alpha(-\log u) = f(u)$$

si avranno gl' integrali (6) e (6') in cui sono soddisfatte le ipotesi del paragrafo precedente, e sarà precisamente

$$\mathrm{a}(x) = \mathrm{b}(x) \ , \ \mathrm{a}_1(x) = -\, \mathrm{b}_1(x).$$

Eseguendo lo stesso cambiamento di variabile sui successivi integrali $\mathrm{a}_2(x)$, $\mathrm{a}_3(x)$, ..., si vede senza difficoltà che la $e^{-tx}\alpha^{(n)}(t)$ si esprime in funzione lineare a coefficienti costanti di

$$u^x f'(u) \ , \ u^{x+1} f''(u) \, , \dots \, u^{x+n} f^{(n)}(u) ;$$

e dalle ipotesi del paragrafo 3 risulta che

$$\mathrm{b}_n(x) = \int_0^1 u^{x-1} f^{(n)}(u)\, du \tag{7}$$

è convergente per $\mathrm{R}(x) > a + n$.

[1] V. la nota al § 1.

Si vede ancora che $f^{(n)}(1)$ è un numero finito $g_n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e fra le $k_n$ e le $g_n$ passano delle relazioni che si possono ottenere in modo assai semplice ([1]).

Ora l' integrazione per parti di (6) e (7) ci dà

$$\mathrm{a}(x) = \frac{g_0}{x} - \frac{1}{x}\,\mathrm{b}_1(x+1) \text{ per } \mathrm{R}(x) > a,$$

$$\mathrm{b}_n(x) = \frac{g_n}{x} - \frac{1}{x}\,\mathrm{b}_{n+1}(x+1) \text{ per } \mathrm{R}(x) > a+n,\ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Cambiando in quest' ultima $x$ in $x+n$, risulta dalla combinazione delle uguaglianze precedenti la relazione valida per $\mathrm{R}(x) > a$:

$$\mathrm{a}(x) = \frac{g_0}{x} - \frac{g_1}{x(x+1)} + \frac{g_2}{x(x+1)(x+2)} - \cdots + \frac{(-1)^n g_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\ldots(x+n)}\,\mathrm{b}_n(x+n+1).$$

Tendendo $x$ all' infinito nel senso dell' asse reale, $\mathrm{b}_n(x+n+1)$ tende a zero; onde viene

$$\lim_{x=\infty} x(x+1)\ldots(x+n)\left\{\mathrm{a}(x) - \frac{g_0}{x} + \frac{g_1}{x(x+1)} - \cdots + \frac{(-1)^n g_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}\right\} = 0\,;$$

e quindi « lo sviluppo in serie di fattoriali, che, se convergente, rappresenta « effettivamente $\mathrm{a}(x)$, lo rappresenta assintoticamente con estensione imme-

([1]) Per ottenere queste relazioni, $\alpha(t)$ si può, senza restrizione, supporre sviluppabile in serie di potenze di $t$. Ne viene

$$f(u) = a(-\log u) = \Sigma(-1)^n \frac{k_n}{n!} \log^n u\,;$$

ma

$$\log^n u = c_{n\cdot n}(u-1)^n + c_{n+1\cdot n}(u-1)^{n+1} + c_{n+2\cdot n}(u-1)^{n+2} - \ldots\ldots,$$

dove $c_{n,n}$, $c_{n+1,n}$, ..... sono numeri noti (i cosidetti numeri di Schläfli). Onde viene

$$f(u) = \Sigma \frac{g_n}{n!}(u-1)^n,$$

con

$$g_n = (-1)^{n-1}(c_{n+1\cdot 1}\,k_1 + c_{n+1\cdot 2}\,k_2 + \cdots + c_{n+1\cdot n+1}\,k_{n+1}).$$

Cfr. il metodo di Stirling indicato da Nielsen (*Recherches sur les séries de factorielles*, negli Ann. de l'Éc. Normale, S. III, T. XIX, pag. 437).

« diata della definizione del Poincaré, se divergente; e quest'ultimo caso si « può dare senza che la funzione generatice sia necessariamente analitica ».

Le considerazioni ingegnose fatte dal Nielsen [1] nel caso della convergenza delle serie di fattoriali, per formare il prodotto, si potrebbero estendere al caso del prodotto di sviluppi assintotici.

## Fisiologia. — *Come sulle montagne diminuisca la sensibilità per l'anidride carbonica inspirata.* Nota del Socio A. Mosso [2].

Descriverò prima il metodo che adoperai in queste ricerche e farò dopo la critica dei metodi che servirono ad altri sperimentatori per conoscere la sensibilità per l'anidride carbonica. Il problema era semplice, si trattava di determinare sulla vetta del Monte Rosa il minimo eccitamento percettibile fatto per mezzo dell'anidride carbonica, e rimanendo costante lo stimolo, di conoscere, scrivendo i moti del respiro, come variasse l'eccitabilità dei centri nervosi respiratori.

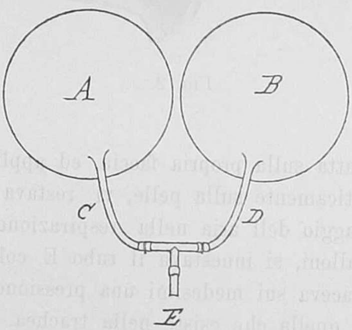


Fig. 1

Non potendo adoperare dei gasometri ordinari, perchè nella Capanna Regina Margherita l'acqua gela ogni notte, pregai la fabbrica Spencer and Sons di Londra [3] di farmi quattro palloni come quelli A, B rappresentati nella fig. 1. Essi sono fatti di una membrana animale impermeabile ed hanno la capacità di circa 60 litri ciascuno e sono provveduti di un lungo tubo, fatto della medesima membrana. Piegati occupano un piccolo volume e possono trasportarsi facilmente. Uno lo si riempiva con aria per mezzo di un soffietto,

(1) Questi Rendiconti, seduta del 17 gennaio 1904.
(2) Presentata nella seduta del 1° maggio 1904.
(3) 56 A Highbury Grove. London N.