ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1904.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente A. Capelli [1].

La presente Nota è un complemento delle altre due da me già pubblicate sullo stesso argomento [2], specialmente per quanto riguarda il teorema di addizione delle funzioni ϑ.

Nella Nota precedente a questa avevo già dato una formola generale di addizione delle funzioni

$$\vartheta_{\gamma g}(u) \equiv e^{\pi i \gamma g} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)\left(u+\frac{g}{2}\right)},$$

cioè un'espressione di

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v) \,.\, \vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v) \,.\, \vartheta_{\gamma_3 g_3}(0) \,.\, \vartheta_{\gamma_4 g_4}(0)$$

in funzione *binomia* delle ϑ di u e v, valida qualunque siano gli interi γ_i, g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ soddisfacenti alle condizioni

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \qquad \text{(mod. 2)}$$

[1] Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

[2] V. Rendiconti delle sedute del 16 novembre 1902 e del 5 aprile 1903.

Questo stesso problema viene qui risoluto con un'altra espressione che è del pari binomia e lascia alle caratteristiche γ e g la stessa generalità. Le notazioni sono le stesse delle due Note precedenti.

I.

1. Nella formola (I) del § I della precedente Nota:

$$\text{(I)} \qquad 2[\gamma, g] = \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'.$$

la quale sussisteva qualunque siano i numeri interi γ e g soddisfacenti alle condizioni

$$\text{(1)} \qquad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}$$

cangiamo le γ_i in $\gamma_i + \varepsilon'$ e le g_i in $g_i + \eta'$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Otteniamo così

$$2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta\varepsilon' + \varepsilon\eta' + \eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon + \varepsilon', g + \eta + \eta']'$$

Se ora poniamo:

$$\varepsilon + \varepsilon' \equiv \varepsilon'', \quad \eta + \eta' \equiv \eta'' \qquad \text{(mod. 2)}$$

essendo ε'' ed η'' uguali allo zero ovvero all'unità, potremo anche scrivere tenendo presenti le condizioni (1)

$$2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] =$$

$$= \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta''\varepsilon' + \varepsilon''\eta' + (\eta'' - \eta')\gamma_1 + (\varepsilon'' - \varepsilon')(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']'$$

Ma le quattro coppie (ε'', η'') corrispondenti alle quattro coppie (ε, η) non differiscono che per l'ordine dalle stesse quattro coppie (ε, η). Quindi si potrà anche scrivere:

$$\text{(II)} \quad 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \sum_{\eta=0}^{\eta=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\eta\varepsilon' + \varepsilon\eta' + (\eta - \eta')\gamma_1 + (\varepsilon - \varepsilon')(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

2. Supponiamo ora, per semplicità, che ε' ed η' siano i numeri 0, ovvero 1, e che la coppia (ε', η') differisca dalla coppia $(0, 0)$. La (I) si po-

trà scrivere, isolando nel secondo membro i termini corrispondenti ad $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$ ed $(\varepsilon, \eta) = (\varepsilon', \eta')$:

$$\text{(I)}' \qquad 2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + (-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + \\ + \sum_{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta'}^{\varepsilon, \eta \neq 0, 0} (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

e similmente la (II):

$$\text{(II)}' \quad 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = (-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma, g]' + [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + \\ + \sum_{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta'}^{\varepsilon, \eta \neq 0, 0} (-1)^{\eta\varepsilon' + \varepsilon\eta' + (\eta - \eta')\gamma_1 + (\varepsilon - \varepsilon')(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

dove col simbolo sommatorio $\sum_{\varepsilon, \eta \neq 0, 0}^{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta'}$ si vuol significare che esso va esteso soltanto a quelle due coppie (ε, η) che differiscono così dalla coppia $(0, 0)$ come dalla coppia (ε', η').

Se ora la uguaglianza (I)′ si somma membro a membro colla (II)′ moltiplicata per

$$(-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)}$$

e si osserva che, quando la coppia (ε, η) differisce così dalla coppia $(0, 0)$ come dalla coppia (ε', η'), si ha

$$\eta\varepsilon' + \varepsilon\eta' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2),$$

si trova

$$\text{(III)} \qquad [\gamma, g] + (-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \\ = [\gamma, g]' + (-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']'.$$

Se invece dalla (I)′ si sottrae la (II)′, moltiplicata come sopra, membro a membro, si trova

$$[\gamma, g] - (-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \\ = \sum_{\varepsilon, \eta \neq 0}^{\varepsilon, \eta \neq \varepsilon', \eta'} (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'.$$

3. Le formole (III) e (III)′ si possono ora anche scrivere più semplicemente

$$\text{(IV)} \qquad [\gamma, g] + (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta] =$$
$$= [\gamma, g]' + (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

e

$$\text{(IV)}' \qquad [\gamma, g] - (-1)^{\eta\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta] =$$
$$= (-1)^{\eta'\gamma_1 + \varepsilon'(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + (-1)^{\eta''\gamma_1 + \varepsilon''(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']'.$$

In queste formole i numeri interi ε ed η sono affatto arbitrarii purchè non entrambi congrui a zero (mod. 2). Quanto ad $\varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ basterà sceglierli in modo che le coppie (ε', η') ed (ε'', η'') siano differenti fra loro (mod. 2) e differiscano così dalla coppia $(0, 0)$, come dalla coppia (ε, η). In effetto, si riconosce subito che, se le formole (IV) e (IV)′ sussistono per valori delle $\varepsilon, \eta, \varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ uguali a 0 ovvero 1, esse sussisteranno del pari se, in luogo di questi valori, si pongano dei numeri qualisivogliano congrui ad essi (mod. 2).

La prima di queste due formole era da noi già stata trovata, con procedimento meno diretto, nel § II della precedente Nota (cfr. art. 3).

II.

1. Le condizioni

$$\Sigma\gamma \equiv \Sigma g \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}$$

saranno evidentemente soddisfatte assumendo:

$$\gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ , \ g_4 = g_1 + g_2 + g_3$$

Noi porremo inoltre

$$(1) \qquad \varepsilon = 1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 \ , \ \eta = 1 - g_1 - g_2 - g_3 \ ,$$

cosicchè sarà

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\gamma = 1 - \varepsilon \ , \ \tfrac{1}{2}\Sigma g = 1 - \eta \ , \ \gamma_4 = 1 - \varepsilon \ , \ g_4 = 1 - \eta \ ,$$

e prenderemo per z_4 il valore particolare $z_4 = 0$, cosicchè

$$\vartheta_{\gamma_4 + \varepsilon, g_4 + \eta}(z_4) = \vartheta_{11}(0) = 0.$$

Con ciò le formole (IV) e (IV)′ ci dànno:

$$
(\mathrm{A})\quad \begin{cases}
\vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3) = \\
= \vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}\dfrac{z_1 - z_2 - z_3}{2}\cdot \prod\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i g_i}(z_i') + \\
+ (-1)^{\eta\gamma_1+\varepsilon(g_1+\eta+1)}\,\vartheta_{11}\left(\dfrac{z_1 - z_2 - z_3}{2}\right)\cdot \prod\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i+\varepsilon,g_i+\eta}(z_i')
\end{cases}
$$

e

$$
(\mathrm{A})'\quad \begin{cases}
\vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3) = \\
= (-1)^{\eta'\gamma_1+\varepsilon'(g_1+\eta+1)}\,\vartheta_{1-\varepsilon+\varepsilon',1-\eta+\eta'}\left(\dfrac{z_1 - z_2 - z_3}{2}\right)\cdot \prod\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i+\varepsilon',g_i+\eta'}(z_i') + \\
+ (-1)^{\eta''\gamma_1+\varepsilon''(g_1+\eta+1)}\,\vartheta_{1-\varepsilon+\varepsilon'',1-\eta+\eta''}\left(\dfrac{z_1 - z_2 - z_3}{2}\right)\cdot \prod\limits_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i+\varepsilon'',g_i+\eta''}(z_i')
\end{cases}
$$

dove

$$
z_1' = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)\ ,\ z_2' = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3)\ ,\ z_3' = \tfrac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3)\,.
$$

Ricordiamo che nelle formole (A) ed (A)′ gli interi ε ed η possono assumersi a piacere, purchè non entrambi $\equiv 0$ (mod. 2), e che gli interi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$ saranno poi assoggettati alle sole condizioni

$$
(1)'\qquad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 - \varepsilon\ ,\ g_1 + g_2 + g_3 = 1 - \eta\,.
$$

2. Se nelle formole (A) ed (A)′ poniamo

$$
z_1 = x_2 + x_3\ ,\ z_2 = -(x_3 + x_1)\ ,\ z_3 = -(x_1 + x_2)
$$

cosicchè

$$
z_1' = -x_1\ ,\ z_2' = x_2\ ,\ z_3' = x_3\ ,\ \frac{z_1 - z_2 - z_3}{2} = x_1 + x_2 + x_3\,,
$$

e poi ne moltiplichiamo entrambi i membri per $(-1)^{\gamma_1 g_1}$, esse prendono le forme equivalenti:

$$
(\mathrm{B})\quad \begin{cases}
(-1)^{\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2+\gamma_3 g_3}\,\vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(x_2+x_2)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(x_3+x_1)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(x_1+x_2) = \\
= \vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(x_1 + x_2 + x_3)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(x_1)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(x_2)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(x_3) + \\
+ (-1)^{\varepsilon}\,\vartheta_{11}(x_1+x_2+x_3)\,.\,\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon,g_1+\eta}(x_1)\,.\,\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon,g_2+\eta}(x_2)\,.\,\vartheta_{\gamma_3+\varepsilon,g_3+\eta}(x_3)
\end{cases}
$$

e

$$(\mathrm{B})' \begin{cases} (-1)^{\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2+\gamma_3 g_3}\, \vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(x_2+x_3)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(x_3+x_1)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(x_1+x_2)= \\ =(-1)^{\varepsilon'(\eta+\eta'+1)}\, \vartheta_{1-\varepsilon+\varepsilon',1-\eta+\eta'}\,(x_1+x_2+x_3)\,.\,\prod_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i+\varepsilon',g_i+\eta'}(x_i)+ \\ +(-1)^{\varepsilon''(\eta+\eta''+1)}\, \vartheta_{1-\varepsilon+\varepsilon'',1-\eta+\eta''}(x_1+x_2+x_3)\,.\,\prod_{i=1}^{i=3} \vartheta_{\gamma_i+\varepsilon'',g_i+\eta''}(x_i)\,. \end{cases}$$

dove:

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=1-\varepsilon\ ,\ g_1+g_2+g_3=1-\eta$$

e la coppia $(\varepsilon\,,\eta)$ può scegliersi a piacere purchè non congrua (mod. 2) alla coppia $(0\,,0)$.

III.

1. Se ora poniamo nelle (B) e (B)'

$$x_1=-v\ ,\ x_2=v\ ,\ x_3=u\,,$$

cosicchè

$$x_2+x_3=u+v\ ,\ x_3+x_1=u-v\ ,\ x_1+x_2=0\ ,\ x_1+x_2+x_3=0\,,$$

ne deduciamo le formole di addizione:

$$(-1)^{\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2+\gamma_3 g_3}\vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(0)\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)=$$
$$=\vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 \gamma_2}(v)+$$
$$+(-1)^{\varepsilon}\,\vartheta_{11}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_3+\varepsilon,g_3+\eta}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon,g_1+\eta}(-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon,g_2+\eta}(v)$$

e

$$(-1)^{\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2+\gamma_3 g_3}\,\vartheta_{1-\varepsilon,1-\eta}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)=$$
$$=(-1)^{\varepsilon'(\eta+\eta'+1)}\,\vartheta_{1-\varepsilon+\varepsilon',1-\eta+\eta'}\,(u)\,\vartheta_{\gamma_3+\varepsilon',g_3+\eta'}\,(u)\,\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon',g_1+\eta'}\,(-v)\,\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon',g_2+\eta'}(v)+$$
$$+(-1)^{\varepsilon''(\eta+\eta''+1)}\vartheta_{1-\varepsilon+\varepsilon'',1-\eta+\eta''}(u)\,\vartheta_{\gamma_3+\varepsilon'',g_3+\eta''}(u)\,\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon'',g_1+\eta''}(-v)\,\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon''g_2+\eta''}(v)$$

2. Ponendo per brevità

$$1-\varepsilon=\sigma\ ,\ 1-\eta=s$$

e sostituendo in luogo di γ_3 e g_3 i loro valori ricavati dalle (1)' del precedente paragrafo, cioè

$$\gamma_3=\sigma-\gamma_1-\gamma_2\ ,\ g_3=s-g_1-g_2\,,$$

ed osservando che

$$(-1)^{\gamma_3 g_3}\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(0)=\vartheta_{\gamma_3 g_3}(0)\,,$$

le formole testè trovate si possono scrivere:

$$(-1)^{\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2}\vartheta_{\sigma s}(0)\,.\,\vartheta_{\sigma-\gamma_1-\gamma_2,s-g_1-g_2}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)=$$
$$=\vartheta_{\sigma s}(u)\,.\,\vartheta_{\sigma-\gamma_1-\gamma_2,s-g_1-g_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(v)-$$
$$-(-1)^{\sigma}\vartheta_{11}(u)\,.\,\vartheta_{1-\gamma_1-\gamma_2,1-g_1-g_2}(u)\,.\,\vartheta_{1-\sigma+\gamma_1,1-s+g_1}(-v)\,.\,\vartheta_{1-\sigma+\gamma_2,1-s+g_2}(v)$$

e

$$(-1)^{\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2}\vartheta_{\sigma s}(0)\,.\,\vartheta_{\sigma-\gamma_1-\gamma_2,s-g_1-g_2}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)=$$
$$=(-1)^{\varepsilon'(s+\eta')}\vartheta_{\sigma+\varepsilon',s+\eta'}(u)\,\vartheta_{\sigma+\varepsilon'-\gamma_1-\gamma_2,s+\eta'-g_1-g_2}(u)\,\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon',g_1+\eta'}(-v)\,\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon',g_2+\eta'}(v)+$$
$$+(-1)^{\varepsilon''(s+\eta'')}\vartheta_{\sigma+\varepsilon'',s+\eta''}(u)\,\vartheta_{\sigma+\varepsilon''-\gamma_1-\gamma_2,s+\eta''-g_1-g_2}(u)\,\vartheta_{\gamma_1+\varepsilon'',g_1+\eta''}(-v)\,\vartheta_{\gamma_2+\varepsilon'',g_2+\eta''}(v).$$

In queste formole le $g_1, g_2, \gamma_1, \gamma_2$ sono degli interi affatto arbitrarii. Anche gli interi σ ed s possono scegliersi ad arbitrio purchè non sia

$$\sigma\equiv s\equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

giacchè non doveva essere

$$\varepsilon\equiv\eta\equiv 0 \quad (\text{mod. } 2).$$

Quanto alle coppie (ε', η') ed (ε'', η''), esse debbono essere distinte (mod. 2) così fra di loro, come dalle coppie $(0, 0)$ ed $(1+\sigma, 1+s)$.

3. Poichè le $g_1, g_2, \gamma_1, \gamma_2$ sono degl'interi affatto arbitrarii, è chiaro che le nostre formole seguiteranno a sussistere anche se in esse le γ_1, γ_2, g_1, g_2 si cangiano rispettivamente in $-\gamma_1$, $-\gamma_2$, $-g_1$, $-g_2$. Con ciò esse assumono, come facilmente si riconosce, la forma

$$\vartheta_{\sigma s}(0)\,.\,\vartheta_{\sigma+\gamma_1+\gamma_2,s+g_1+g_2}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)=$$
$$=\vartheta_{\sigma s}(u)\,.\,\vartheta_{\sigma+\gamma_1+\gamma_2,s+g_1+g_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(-v)-$$
$$-(-1)^{\sigma}\vartheta_{11}(u)\,\vartheta_{1+\gamma_1+\gamma_2,1+g_1+g_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_1+\sigma-1,g_1+s-1}(v)\,\vartheta_{\gamma_2+\sigma-1,g_2+s-1}(-v)$$

e

$$\vartheta_{\sigma s}(0)\,.\,\vartheta_{\sigma+\gamma_1+\gamma_2,s+g_1+g_2}(0)\,.\,\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)=$$
$$=(-1)^{\varepsilon'(s+\eta')}\vartheta_{\sigma+\varepsilon',s+\eta'}(u)\,\vartheta_{\sigma+\varepsilon'+\gamma_1+\gamma_2,s+\eta'+g_1+g_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_1-\varepsilon',g_1-\eta'}(v)\,\vartheta_{\gamma_2-\varepsilon',g_2-\eta'}(-v)$$
$$+(-1)^{\varepsilon''(s+\eta'')}\vartheta_{\sigma+\varepsilon'',s+\eta''}(u)\,\vartheta_{\sigma+\varepsilon''+\gamma_1+\gamma_2}\vartheta_{s+\eta''+g_1+g_2}(u)\,\vartheta_{\gamma_1-\varepsilon'',g_1-\eta''}(v)\,\vartheta_{\gamma_2-\varepsilon'',g_2-\eta''}(-v)$$

In entrambe queste formole [1] *le caratteristiche intere* (*positive o negative*) $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$ *sono del tutto arbitrarie; ed anche gli interi* σ *ed* s *si possono scegliere a piacere purchè non entrambi* $\equiv 1$ (mod. 2). *Quanto ai numeri interi* $\varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ *che si presentano nella seconda formula, essi debbono scegliersi in modo che le quattro coppie*

$$(0, 0), (1+\sigma, 1+s), (\varepsilon', \eta'), (\varepsilon'', \eta'')$$

siano fra loro distinte (mod. 2).

Geometria. — *Geometria intrinseca negli spazii di curvatura costante.* Nota del Corrispondente E. Cesàro [2].

La geometria degli enti immersi in uno spazio ad n dimensioni, di curvatura costante $-1/R^2$, si può agevolmente costituire, in forma intrinseca e senza uscire dallo spazio stesso, valendosi del sistema di coordinate adoperato da Beltrami [3] nella sua *Teoria fondamentale*, di quel sistema cioè che all'espressione della distanza fra due punti

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad (x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \dots, x_n+\delta x_n),$$

infinitamente vicini, conferisce la forma

$$\frac{R}{x}\sqrt{\delta x^2+\delta x_1^2+\delta x_2^2+\cdots+\delta x_n^2}, \tag{1}$$

con x vincolata alle coordinate mediante la relazione

$$x^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=R^2. \tag{2}$$

Quando il reticolo delle linee coordinate si sposta rigidamente nello spazio, in corrispondenza dei valori che va assumendo un parametro s, le coordinate d'un punto *fisso* variano evidentemente in guisa che le loro derivate rispetto ad s si esprimono nelle coordinate stesse, sia esplicitamente, sia, se si vuole, mediante la funzione x; ed anche la derivata di questa si può immaginare espressa in modo analogo, sicchè

$$\frac{dx}{ds}=\varphi(x, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e

$$\frac{dx_i}{ds}=\varphi_i(x, x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{3}$$

[1] La prima di esse non differisce sostanzialmente dalle formole di addizione (III) da noi già date nel § III della precedente Nota.

[2] Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

[3] *Opere matematiche*, t. I, pag. 407.