ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

In entrambe queste formole [1] *le caratteristiche intere (positive o negative)* $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$ *sono del tutto arbitrarie; ed anche gli interi* σ *ed* s *si possono scegliere a piacere purchè non entrambi* $\equiv 1$ (mod. 2). *Quanto ai numeri interi* $\varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ *che si presentano nella seconda formula, essi debbono scegliersi in modo che le quattro coppie*

$$(0\,,0)\;,\;(1+\sigma\,,1+s)\;,\;(\varepsilon'\,,\eta')\;,\;(\varepsilon''\,,\eta'')$$

siano fra loro distinte (mod. 2).

Geometria. — *Geometria intrinseca negli spazii di curvatura costante.* Nota del Corrispondente E. Cesàro [2].

La geometria degli enti immersi in uno spazio ad n dimensioni, di curvatura costante $-1/R^2$, si può agevolmente costituire, in forma intrinseca e senza uscire dallo spazio stesso, valendosi del sistema di coordinate adoperato da Beltrami [3] nella sua *Teoria fondamentale*, di quel sistema cioè che all'espressione della distanza fra due punti

$$(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \quad , \quad (x_1 + \delta x_1\,, x_2 + \delta x_2\,, \ldots, x_n + \delta x_n),$$

infinitamente vicini, conferisce la forma

$$\frac{R}{x}\sqrt{\delta x^2 + \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots + \delta x_n^2}, \tag{1}$$

con x vincolata alle coordinate mediante la relazione

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2. \tag{2}$$

Quando il reticolo delle linee coordinate si sposta rigidamente nello spazio, in corrispondenza dei valori che va assumendo un parametro s, le coordinate d'un punto *fisso* variano evidentemente in guisa che le loro derivate rispetto ad s si esprimono nelle coordinate stesse, sia esplicitamente, sia, se si vuole, mediante la funzione x; ed anche la derivata di questa si può immaginare espressa in modo analogo, sicchè

$$\frac{dx}{ds} = \varphi(x\,, x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n),$$

e

$$\frac{dx_i}{ds} = \varphi_i(x\,, x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \tag{3}$$

[1] La prima di esse non differisce sostanzialmente dalle formole di addizione (III) da noi già date nel § III della precedente Nota.

[2] Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

[3] *Opere matematiche*, t. I, pag. 407.

per $i = 1, 2, \ldots, n$. D'altronde, perchè sia soddisfatta la (2), si trova, derivando, che dev'essere

$$x\varphi + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \cdots + x_n\varphi_n = 0. \tag{4}$$

Quando il punto $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ si va spostando nello spazio, le variazioni assolute delle sue coordinate son date dalle formole

$$\frac{\delta x_i}{ds} = \frac{dx_i}{ds} - \varphi_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{5}$$

e però le (3) sono le *condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto.*

Ora noi ci proponiamo di determinare le $n+1$ funzioni φ, per la qual cosa ci conviene pensare le $n+1$ variabili x come provvisoriamente sciolte dal vincolo (2), ma tali, tuttavia, che non sia lecito attribuir loro incrementi non compatibili col vincolo stesso, ossia non soddisfacenti alla relazione

$$x\,\delta x + x_1\,\delta x_1 + x_2\,\delta x_2 + \cdots + x_n\,\delta x_n = 0. \tag{6}$$

Esprimiamo che, quando il reticolo si sposta, la distanza (1) fra due punti *fissi* rimane invariata. Siccome

$$\frac{d}{ds}\,\delta x_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\,\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\,\delta x_n$$

per $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ (convenendo di sopprimere l'indice 0), un calcolo facile dà

$$\frac{\varphi}{x}(\delta x^2 + \delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots + \delta x_n^2) = {}^1\!/_2 \sum_{i,j}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i\,\delta x_j,$$

dove i ed j debbono separatamente variare da 0 ad n. In particolare, se tutte le δx si pongono uguali a zero, tranne δx_i e δx_j, che bisogna supporre proporzionali ad x_j e $-x_i$ affinchè sia soddisfatta la (6), si ottiene

$$\frac{\varphi}{x}(x_i^2 + x_j^2) = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\,x_j^2 + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j}\,x_i^2 - {}^1\!/_2\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)x_i\,x_j;$$

quindi

$$\frac{\varphi}{x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{per } i \gtrless j.$$

Da queste ultime si deduce, derivando,

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \, \partial x_k} = - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \, \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j \, \partial x_i} = - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \, \partial x_j} = 0 , \tag{8}$$

per ogni terna i, j, k di indici differenti. Intanto dalla prima eguaglianza (7) risulta immediatamente che φ è il prodotto di x per una funzione di $x_1, x_2, \dots x_n$; e questa, in virtù di (8) per $i = 0$, deve contenere linearmente le variabili, sicchè

$$\varphi = (a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \, x .$$

Dalla (8), per $i > 0$, segue ancora che $\partial \varphi_i / \partial x_j$ dipende soltanto da x_i e da x_j; e poichè

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\varphi}{x} = a_j , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varphi}{x} = - a_i ,$$

si ha

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = a_{ij} + a_j x_i - a_i x_j ,$$

con $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Conosciamo così $n - 1$ derivate di φ_i; le altre due sono

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - a_i x , \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = \frac{\varphi}{x} = a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n .$$

Dunque

$$\begin{gathered} \varphi_i = a'_i + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \\ + (a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \, x_i - \tfrac{1}{2} a_i (x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) . \end{gathered}$$

Ora, se si tien conto del vincolo (2) fra le variabili, bisogna che sia soddisfatta anche la relazione (4), ed occorre perciò che si abbia, identicamente,

$$a R^2 + \tfrac{1}{2} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \, R^2 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \cdots + a'_n x_n = 0 ,$$

d'onde $a = 0$, $a'_i = - \tfrac{1}{2} a_i R^2$, sicchè, finalmente,

$$\begin{gathered} \varphi_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \\ + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n) \, x_i - a_i R^2 . \end{gathered}$$

Le formole precedenti sono particolarmente utili per lo studio degli enti immersi in uno spazio *non-euclideo*, e conviene applicarle immaginando che l'origine $M(x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0)$ passi per tutte le posizioni possibili nell'ente da studiare. Così l'origine trasporta con sè parecchi vantaggi dell'ordinaria geometria euclidea, giacchè nello spazio infinitesimo circostante ad essa il reticolo delle linee coordinate è simile a quello delle coordinate rettangole cartesiane, e rimangono perciò in vigore, nel dominio di M, le relazioni angolari euclidee. In particolare la direzione di qualsiasi retta condotta per M è definita da coseni α_i, tali che $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=1$. Per ogni altra retta i coseni direttori si possono definire scegliendo, sulla retta che si vuol considerare, un punto $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, tale che le coordinate dei punti all' infinito, I ed I', siano $\xi_1 \pm \alpha_1 R$, $\xi_2 \pm \alpha_2 R, \ldots, \xi_n \pm \alpha_n R$, per la qual cosa occorre che si abbia

$$(\xi_1 \pm \alpha_1 R)^2 + (\xi_2 \pm \alpha_2 R)^2 + \cdots + (\xi_n \pm \alpha_n R)^2 = R^2,$$

ossia

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n = 0, \tag{9}$$

ed inoltre, ponendo $\xi = R \operatorname{sen} \omega$, $\alpha = \cos \omega$,

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1. \tag{10}$$

Intanto la direzione MP è definita dai coseni $\xi_i/\alpha R$, le direzioni MI, MI' dai coseni $\pm \alpha_i + \xi_i/R$; e però gli angoli PMI, PMI' sono entrambi uguali ad ω, giacchè si trova, ricordando la (9), che il coseno di ciascuno di essi ha il valore

$$\sum_1^n \frac{\xi_i}{\alpha R}\left(\pm \alpha_i + \frac{\xi_i}{R}\right) = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}{\alpha R^2} = \alpha.$$

Dunque P è il piede della perpendicolare condotta per M alla retta considerata, ed ω è l'*angolo di parallelismo* di questa retta rispetto ad M.

Ora è facile trovare le *condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità* d'una retta. Basta (ed è questo un vantaggio della geometria *non-euclidea*) esprimere l'immobilità dei punti all'infinito. Le condizioni per tale immobilità si scindono subito in

$$\frac{d\alpha_i}{ds} = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n$$
$$+ (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n)\xi_i + (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n)\alpha_i, \tag{11}$$

e, ricordando le (5),

$$\frac{\delta \xi_i}{ds} = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n)\alpha_i R^2. \tag{12}$$

Da queste ultime risulta

$$\xi \frac{\delta\xi}{ds} = -\sum_1^n \xi_i \frac{\delta\xi_i}{ds} = 0 ;$$

quindi $\delta\xi/ds = 0$, ossia $d\xi/ds = (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n)\,\xi$, e per conseguenza

$$(13) \qquad \frac{d\omega}{ds} = (a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n)\,\mathrm{tg}\,\omega .$$

Inoltre dalla (1) si deduce, mediante le (12), che lo spostamento del punto P è

$$d\sigma = \frac{\mathrm{R}}{\xi}\sqrt{\delta\xi_1^2 + \delta\xi_2^2 + \cdots + \delta\xi_n^2} = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n)\,\mathrm{R}^2 ds .$$

D'altra parte le variazioni delle coordinate dell'origine sono, per le (5),

$$(14) \qquad \delta x_1 = a_1 \mathrm{R}^2 ds\ ,\ \delta x_2 = a_2 \mathrm{R}^2 ds\ , \ldots ,\ \delta x_n = a_n \mathrm{R}^2 ds ,$$

e però all'ultima eguaglianza si può dar la forma

$$(15) \qquad d\sigma = \alpha_1\,\delta x_1 + \alpha_2\,\delta x_2 + \cdots + \alpha_n\,\delta x_n .$$

Il moto d'un punto è dunque legato a quello della sua projezione sopra una retta fissa come nello spazio euclideo; ma se la retta si allontana indefinitamente nello spazio di Lobatschewsky, se cioè tende ad essere $\omega = 0$, ossia $\alpha = 1$, la (10) mostra che tutte le α_i tendono ad annullarsi, e per conseguenza P a rimanere immobile. Al medesimo risultato si perviene, del resto, direttamente, se si osserva che la projezione $d\sigma_0$ dello spostamento di M sulla perpendicolare ad MP, condotta per M nel piano IMI' è, nel quadrilatero costruito sui lati $d\sigma_0$, $d\sigma$ ed $\mathrm{MP} = r$, vincolata a $d\sigma$ ed r mediante la relazione $\mathrm{th}\,\frac{d\sigma_0}{\mathrm{R}} = \mathrm{th}\,\frac{d\sigma}{\mathrm{R}}\cdot \mathrm{ch}\,\frac{r}{\mathrm{R}}$, dalla quale, ricordando ([1]) che $\mathrm{sen}\,\omega = 1/\mathrm{ch}\,\frac{r}{\mathrm{R}}$, si deduce $d\sigma = d\sigma_0\cdot\mathrm{sen}\,\omega$; e questa, poichè i coseni $\alpha_i/\mathrm{sen}\,\omega$ definiscono, in virtù di (3), la direzione di $d\sigma_0$, non differisce dalla (15).

Ci si consenta, ora, qualche rapido cenno intorno al modo di applicare quanto precede allo studio delle curve e delle superficie nello spazio non-euclideo a tre dimensioni. Si dirigano gli assi delle x, y, z secondo la tangente, la binormale e la normale principale della curva descritta da M, e si prenda ds uguale allo spostamento infinitesimo di M. Per le (14) dev'essere $a_1 = 1/\mathrm{R}^2$, $a_2 = a_3 = 0$; ed inoltre, poichè (per le condizioni d'immobilità dei punti) il piano $y = 0$ rota intorno alla retta $a_{21}\,x + a_{23}\,z = 0$, se si

([1]) Lobatschewsky, Giornale di Battaglini, 1867, pag. 289.

vuole che questa sia la tangente (affinchè $y = 0$ sia il piano osculatore) si deve prendere $a_{21} = 0$, e per conseguenza $a_{12} = 0$. Dopo ciò, se si pone $a_{13} = \varkappa$, $a_{23} = \tau$, si trova che le condizioni necessarie e sufficienti per l'immobilità del punto (x, y, z) sono

$$(16) \quad \frac{dx}{ds} = \varkappa z - 1 + \frac{x^2}{R^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \tau z + \frac{xy}{R^2}, \quad \frac{dz}{ds} = -(\varkappa x + \tau y) + \frac{xz}{R^2}.$$

Per una retta definita dal corrispondente punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ e dai coseni direttori α, β, γ, le condizioni d'immobilità (11) e (12) diventano

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \varkappa\gamma + 2\dfrac{\alpha\xi}{R^2}, & \dfrac{d\xi}{ds} = \varkappa\zeta - 1 + \alpha^2 + \dfrac{\xi^2}{R^2}, \\[2ex] \dfrac{d\beta}{ds} = \tau\gamma + \dfrac{\alpha\eta + \beta\xi}{R^2}, & \dfrac{d\eta}{ds} = \tau\zeta + \alpha\beta + \dfrac{\xi\eta}{R^2}, \\[2ex] \dfrac{d\gamma}{ds} = -(\varkappa\alpha + \tau\beta) + \dfrac{\alpha\zeta + \gamma\xi}{R^2}, & \dfrac{d\zeta}{ds} = -(\varkappa\xi + \tau\eta) + \alpha\gamma + \dfrac{\xi\zeta}{R^2}; \end{cases}$$

e dalla terna di sinistra agevolmente si trae il significato geometrico di $\varkappa$ e di τ, *flessione* e *torsione* della linea (M). È poi utile notare che la (13) dà $\dfrac{d\omega}{ds} = \dfrac{\xi}{R^2} \operatorname{tg} \omega$; ossia

$$(18) \quad \frac{d}{ds} \log \operatorname{sen} \omega = -\frac{d}{ds} \log \operatorname{ch} \frac{r}{R} = \frac{\xi}{R^2}.$$

Da questa e dalle (17) di sinistra segue che le condizioni

$$(19) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \varkappa\gamma + \frac{\alpha\xi}{R^2}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \tau\gamma + \frac{\alpha\eta}{R^2}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -(\varkappa\alpha + \tau\beta) + \frac{\alpha\zeta}{R^2}$$

sono soddisfatte dai coseni direttori α, β, γ della *perpendicolare ad* MP, *elevata per* M *nel piano* IMI'; ed inoltre si ha $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$. Segue invece da tutte le (17) che i coseni direttori di qualunque *parallela, condotta per* M *ad una retta fissa*, soddisfanno alle condizioni

$$(20) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \varkappa\gamma - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \tau\gamma + \frac{\alpha\beta}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = -(\varkappa\alpha + \tau\beta) + \frac{\alpha\gamma}{R}.$$

Inoltre $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = R \cos^2 \omega$. Se, per esempio, si vuole che (M) sia geodetica d'un cilindro (cono col vertice all'infinito), bisogna che le (20) siano soddisfatte per $\gamma = 0$; e però, se si pone $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$, si trova

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}, \quad \varkappa \cos\theta + \tau \operatorname{sen}\theta = 0,$$

d'onde $\tau = \varkappa \operatorname{sh}\frac{s}{R}$, e non $\varkappa/\tau$ costante, come nello spazio euclideo. Invece, se si vuole che la curva sia geodetica sulla superficie (rotonda) *luogo dei punti equidistanti da una retta fissa*, bisogna prima di tutto scrivere $\xi = 0$, in virtù di (18), per esprimere che la curva appartiene alla detta superficie; poi $\alpha\eta = \beta\xi$, e per conseguenza, successivamente, $\eta = 0$, $\zeta = R\cos\omega$, $\gamma = 0$, per esprimere che la normale principale incontra la retta fissa. Posto $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$, una delle (19), la prima o la seconda, mostra subito che θ è *costante*; poi dalle (17) di destra, moltiplicando α e β per $\operatorname{sen}\omega$, si ha

$$\varkappa R = \operatorname{th}\frac{r}{R}\cdot\cos^2\theta + \operatorname{coth}\frac{r}{R}\cdot\operatorname{sen}^2\theta \quad , \quad \tau R = \left(\operatorname{th}\frac{r}{R} - \operatorname{coth}\frac{r}{R}\right)\cos\theta\operatorname{sen}\theta,$$

ossia $\varkappa$ e τ *costanti*. Adunque son queste le curve che nello spazio di Lobatschewsky conservano le proprietà delle eliche circolari euclidee. In particolare per $\theta = 0$ e per $\theta = {}^1/_2\pi$ si trovano circoli (meridiani e paralleli), intrinsecamente definiti nel loro piano dall'una o dall'altra equazione $\varkappa R = \operatorname{th}\frac{r}{R}$, $\varkappa R = \operatorname{coth}\frac{r}{R}$. Se i paralleli hanno il centro reale, i meridiani lo hanno ideale; ma può accadere che, inversamente, i paralleli, e non i meridiani, abbiano il centro ideale, vale a dire che l'asse di rotazione si trovi *fuori* dello spazio reale, senza che in questo la superficie cessi di esistere. Ciò si spiega osservando che ogni circonferenza è il luogo dei punti equidistanti dalla polare del proprio centro rispetto all'assoluto, e che tale retta « cade a distanza finita, infinita, o ideale, secondo che il centro cade a distanza ideale, infinita, o finita » [1].

Se, pur continuando a tenere l'asse delle x tangente alla linea (M), si prende l'asse delle z normale ad una superficie qualunque, che passa per (M), si è condotti a considerare le curvature $\mathfrak{N} = \varkappa\cos\psi$, $\mathfrak{G} = \varkappa\operatorname{sen}\psi$, $\mathfrak{T} = \frac{d\psi}{ds} - \tau$, che la linea possiede rispetto alla superficie, designando con ψ l'inclinazione della normale principale sulla normale alla superficie. Con procedimento del tutto simile a quello da noi adoperato altrove [2] si trovano le (16) trasformate nelle seguenti condizioni

$$\frac{dx}{ds} = \mathfrak{N}z - \mathfrak{G}y - 1 + \frac{x^2}{R^2},\ \frac{dy}{ds} = \mathfrak{G}x - \mathfrak{T}z + \frac{xy}{R^2},\ \frac{dz}{ds} = \mathfrak{T}y - \mathfrak{N}x + \frac{xz}{R^2},$$

dalle quali è poi agevole dedurre i teoremi di Meusnier, Bonnet, ecc. Appli-

(1) Battaglini, Giornale di Matematiche, 1867, pag. 228.

(2) *Geometria intrinseca*, cap. XI.

cando queste relazioni ad una coppia ortogonale di sistemi di linee, si giunge alle formole

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s_1} = \mathfrak{N}_1 z - \mathcal{G}_1 y - 1 + \dfrac{x^2}{R^2}\,, & \dfrac{\partial x}{\partial s_2} = \mathcal{G}_2 y - \mathfrak{T} z + \dfrac{xy}{R^2}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial s_1} = \mathcal{G}_1 x - \mathfrak{T} z + \dfrac{xy}{R^2} & , \dfrac{\partial y}{\partial s_2} = \mathfrak{N}_2 z - \mathcal{G}_2 x - 1 + \dfrac{y^2}{R^2}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial s_1} = \mathfrak{T} y - \mathfrak{N}_1 x + \dfrac{xz}{R^2} & , \dfrac{\partial z}{\partial s_2} = \mathfrak{T} x - \mathfrak{N}_2 y + \dfrac{yz}{R^2}\,; \end{cases}$$

e da queste, mercè la condizione d' integrabilità

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} = k_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial s_2}\,,$$

è facile trarre, prima $k_1 = -\mathcal{G}_1$, $k_2 = \mathcal{G}_2$, poi le formole di Codazzi

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial s_2} + 2\mathfrak{T}\mathcal{G}_1 = (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2)\,\mathcal{G}_2\,,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial s_1} + 2\mathfrak{T}\mathcal{G}_2 = (\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1)\,\mathcal{G}_1\,,$$

e la formola di Gauss

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial s_1} + \mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_2^2 + K = \frac{1}{R^2}\,,$$

in cui K designa la curvatura $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 - \mathfrak{T}^2$.

Terminiamo con un'applicazione alle superficie rotonde. Riferita la superficie alle linee di curvatura (meridiani e paralleli), si ha $\mathfrak{T} = 0$, $\mathcal{G}_1 = 0$, ed $\mathfrak{N}_1$ rappresenta la curvatura $\varkappa$ del meridiano; poi, se r è il raggio del parallelo,

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{\cos\psi}{R\,\mathrm{th}\,\dfrac{r}{R}}\,,\quad \mathcal{G}_2 = \frac{\mathrm{sen}\,\psi}{R\,\mathrm{th}\,\dfrac{r}{R}}\,,$$

dove r e ψ dipendono unicamente dall'arco s del meridiano. Ora la prima formola di Codazzi e la formola di Gauss danno

$$(22)\qquad \frac{dr}{ds} = \mathrm{sen}\,\psi\,,\quad \frac{d\psi}{ds} = -\varkappa + \frac{\cos\psi}{R}\,\mathrm{th}\,\frac{r}{R}\,,$$

come si può, del resto, stabilire anche mediante le (21) di sinistra, esprimendo l'immobilità dei punti

$$x = -\mathrm{R}\,\mathrm{sen}(\psi \pm \omega)\ ,\ y = 0\ ,\ z = \mathrm{R}\cos(\psi \pm \omega),$$

situati sull'asse di rotazione, all'infinito. Si ottiene infatti

$$\frac{d}{ds}(\psi \pm \omega) = -\varkappa + \frac{\cos(\psi \pm \omega)}{\mathrm{R}},$$

d'onde, se si pon mente alla relazione $\cos\omega = \mathrm{th}\,\frac{r}{\mathrm{R}}$, risultano le (22). Si cerchino, per esempio, tutte le superficie rotonde, per le quali la curvatura K è uguale ad $1/\mathrm{R}^2$. Bisogna che sia $\varkappa\mathrm{R}\cos\psi = \cos\omega$, e per conseguenza, sostituendo nella seconda formola (22), ed integrando, $\mathrm{sen}\,\psi = m\,\mathrm{sen}\,\omega$. Per $m = 1$, poichè $\psi = \omega$ o $\psi = \pi - \omega$, si vede che le normali son tutte parallele all'asse, in un verso o nell'altro. Si ha dunque l'*orisfera*. Per $m = 0$ è $\psi = 0$, e si ritrova perciò, in virtù della prima formola (22), il *luogo dei punti equidistanti da una retta fissa*. Nel caso generale si ha

$$\frac{d\omega}{ds} = -\frac{m}{\mathrm{R}}\,\mathrm{sen}\,\omega\,,\ \text{d'onde}\ \cot\omega = \mathrm{sh}\,\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{ms}{\mathrm{R}}\ ;$$

quindi, se con ϱ si designa il raggio di curvatura del meridiano,

$$\mathrm{th}\,\frac{\varrho}{\mathrm{R}} = \frac{\cos\psi}{\cos\omega},\ \text{d'onde}\ \ \mathrm{ch}\,\frac{\varrho}{\mathrm{R}} = \frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\cdot\frac{s}{\mathrm{R}},$$

equazione d'una *sviluppante di circolo*. Conviene tuttavia mantenere l'equazione sotto la forma

$$(23)\qquad \varkappa\mathrm{R} = \frac{ms}{\sqrt{m^2 s^2 + (1-m^2)\,\mathrm{R}^2}}$$

per evitare che possa prender forma immaginaria. Si può sempre supporre $m > 0$, cambiando, se occorre, il segno di s. Intanto per $m < 1$ si vede subito che $|\varkappa| < 1/\mathrm{R}$ qualunque sia s, d'onde segue che la curva è *priva di sviluppata* reale. Siccome per $s = 0$ si ha $\varkappa = 0$, $r = 0$, si vede che il meridiano s'inflette sull'asse di rotazione, col quale fa, nel punto d'incontro, un angolo che ha per seno m. Per $m > 1$ sparisce il punto d'inflessione, ed apparisce in sua vece una cuspide corrispondente al valore $\frac{\mathrm{R}}{m}\sqrt{m^2-1}$ di s. In questo punto si ha $\mathrm{ch}\,\frac{r}{\mathrm{R}} = m$, $\psi = {}^1/_2\,\pi$, e però la tangente nella cuspide è perpendicolare all'asse di rotazione, e la cuspide stessa dista dall'asse per $R \log(m + \sqrt{m^2 - 1})$. Nel caso attuale il meridiano è bensì la sviluppante d'una circonferenza *reale*, ma il centro di questa circonferenza *non è* reale, perchè il raggio r' è dato dalla formola [1]

$$\mathrm{th}\,\frac{r'}{R} = \mathrm{sh}\,\frac{\varrho}{R}\,\frac{d\varrho}{ds} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} > 1 .$$

Peraltro si noti che $\mathrm{th}\,\frac{r}{R} \cdot \mathrm{th}\,\frac{r'}{R} = 1$, d'onde segue che, se r è reale, r' è immaginario, *e viceversa*. Ci si rivela così, tra le superficie prese a considerare, un terzo tipo di superficie rotonde, le quali, mentre hanno per meridiano la sviluppante d'un circolo *a centro reale*, ammettono soltanto un *asse ideale* di rotazione. Le formole relative a quest'ultimo tipo si ottengono cambiando m^2 in $-m^2$, sicchè l'equazione intrinseca del meridiano si trasforma in

$$\varkappa R = \frac{ms}{\sqrt{m^2 s^2 + (1 + m^2) R^2}} ;$$

e questa, per m infinito, tende a confondersi con la (23), ed a rappresentare la sviluppante dell'oriciclo [1].

Paleontologia. — *Balenottera di Borbolya* (Ungheria). Nota del Socio G. Capellini.

In una cava di argilla che si trova nel comune di Borbolya in Ungheria, a poca distanza da Wienerneustädt in Austria, circa venti chilometri ad ovest del lago Fertö, il 30 agosto 1899 furono scoperte le ossa fossili di un cetaceo. Il direttore del R. Istituto geologico di Budapest appena ne ebbe avviso dispose perchè il dott. Tommaso Szonlagh dirigesse la escavazione del fossile, e il proprietario della tegolaia offrì ogni sorta di facilitazioni perchè tutto potesse essere scavato e raccolto diligentemente, e quindi donò al R. Istituto geologico gli importanti resti scheletrici della piccola balena.

Il preparatore Szedlzär István fu incaricato di restaurare quelle ossa che subito furono riconosciute spettanti ad una piccola balena, e con pazienza ammirabile si accinse a ricostituire altresì le ossa minutamente frantumate; chiedendo consiglio a quanti potevano aiutarlo e giovandosi di buoni disegni di scheletri di balenottere, tentò quindi di ricostituire anche le ossa mancanti

(1) Questi Rendiconti, 1904, pag. 444.