ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Abbiamo il piacere di aggiungere che due altri cani presentano traccia di infezione strumosa e che questa è molto evidente in un terzo cane.

III. Nuove esperienze si sono fatte in seguito all'ipotesi di Combe che ammette la possibilità del contagio diretto. Cani provenienti da Cogne e da Cedrasco, più o meno recentemente diventati gozzuti, vennero fatti convivere in ambiente chiuso con altri cani indenni; il risultato fu negativo.

IV. Negativi risultarono tutti i tentativi di infezione per mezzo dell'innesto di porzioni di tiroide e di ipofisi di cani gozzuti di recente. Oltre gli esperimenti già accennati nell'ultima Nota, altri furono istituiti sempre, come si è detto con risultato negativo.

V. Anche il cane va soggetto al cretinismo: possiamo anzi aggiungere che i rapporti tra gozzo e cretinismo già noti per l'uomo valgono anche per il cane.

Matematica. — *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie.* Nota di M. DE FRANCHIS, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO [1].

In questa Nota mi propongo di trovare quali siano i piani doppi dotati di due o più integrali di differenziali totali di 1ª specie.

Qualche cosa sui piani doppi dotati di tali integrali era già nota. Ad esempio, era noto che la curva di diramazione deve essere necessariamente riducibile e che in un punto ove passano due sole componenti di essa devono essere riuniti più di uno dei punti d'intersezione delle due componenti [2].

Ma una effettiva enumerazione dei tipi di tali piani doppi non era ancora stata fatta. Io volli dapprima tentare tale enumerazione. Ma, le gravi difficoltà che incontrai mi obbligarono a restringere la ricerca a quei piani doppi i quali contengono più di un differenziale totale di 1ª specie. Io trovo che tali piani doppi posseggono un fascio iperellittico, di genere $\pi > 1$ di curve. Essi contengono π, e solo π, differenziali totali di 1ª specie, linearmente indipendenti. La curva di diramazione del piano doppio si compone di $2\pi + 2$ curve di un medesimo fascio (quello corrispondente doppiamente al fascio iperellittico), spoglie delle loro eventuali componenti multiple, contate il massimo numero pari di volte possibile. Anzi, il numero di quelle curve può

[1] Presentata nella seduta del 4 giugno 1904.

[2] Per queste ed altre esclusioni vedasi la Memoria del sig. H. Lacaze, *Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques* (Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1901).

ridursi a $2\pi + 1$ se il fascio di curve piane predetto contiene totalmente una curva contata 2 volte.

Rimane dubbio se, oltre ai piani doppi possedenti un fascio ellittico di curve, cioè la cui curva di diramazione si compone di 4 curve di uno stesso fascio, spoglie delle loro eventuali componenti multiple contate il massimo numero di volte possibile (delle quali componenti multiple alcune possono formare una curva totale del fascio), esistano piani doppi possedenti *un solo* differenziale totale di 1ª specie.

1. Sia $z^2 = \psi(x, y)$ una superficie (*piano doppio*) dotata di un differenziale totale di 1ª specie $R\,dx + S\,dy$, ove R ed S sono funzioni razionali di x, y, z, essendo poi $\psi(x, y)$ una funzione razionale intera di x, y, di grado $2p + 2$ (¹). Tenendo conto della relazione $z^2 = \psi$, tale differenziale può mettersi sotto la forma $\left(\frac{R_1}{z} + R_2\right) dx + \left(\frac{S_1}{z} + S_2\right) dy$, ove R_1, R_2, S_1, S_2 sono funzioni razionali di x, y. Poichè la superficie ammette la trasformazione birazionale in sè (simmetria) $x' = x, y' = y, z' = -z$ anche il differenziale $\left(-\frac{R_1}{z} + R_2\right) dx + \left(-\frac{S_1}{z} + S_2\right) dy$ è totale e di 1ª specie, sulla superficie, sicchè la somma dei due differenziali precedenti, $2(R_2\,dx + S_2\,dy)$, dev'essere un differenziale totale di 1ª specie. Ma in esso non figura z, quindi, non potendo il piano x, y, possedere di tali differenziali (di 1ª specie), occorre che sia $R_2 = S_2 = 0$. Ponendo dunque $R_1 = P$, $S_1 = Q$, il nostro differenziale sarà della forma $\frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{\psi}}$, essendo P e Q funzioni razionali di x, y.

Per dire qualche cosa di più riguardo alla struttura di P e Q, cominciamo dall'osservare che, dato ad y un valor costante, $\bar{y}$, il nostro differenziale riducesi a $\frac{P\,dx}{\sqrt{\psi}}$, che deve essere un differenziale iperellittico di 1ª specie relativo alla curva $z^2 = \psi(x, \bar{y})$, la quale è, al massimo, di genere p; sicchè P sarà, rispetto ad x, intera e di grado $p - 1$, al massimo.

Porremo dunque

$$P = a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \cdots + a_{p-2} x + a_{p-1},$$

ove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ sono funzioni razionali della sola y.

Se, per un valor finito b di y, qualcuna delle funzioni a_i avesse un polo, denotando con r il massimo ordine di molteplicità di tal polo per le a_i, avremmo,

$$a_i = \frac{G_i(y)}{(y - b)^r},$$

(¹) S'intende sempre che ψ non contiene, com'è lecito supporre (potendosi ciò ottenere con una trasformazione birazionale della superficie), come fattori, potenze, ad esponente > 1, di polinomi.

ove le $G_i(y)$ sarebbero funzioni razionali di y olomorfe nell' intorno di $y=b$, delle quali una almeno sarebbe, nel punto $y=b$, diversa da 0.

Potremmo allora scegliere un cammino cosiffatto, $x_0\, x_1$, che fosse

$$\sum_{i=0}^{p-1} G_i(b) \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^{p-i-1}\, dx}{\sqrt{\psi(x,b)}} \neq 0.$$

Allora non sarebbe certo finito il $\lim\limits_{\overline{y}=b} \int_{x_0}^{x_1} \frac{P\, dx}{\sqrt{\psi(x,\overline{y})}}$, contro l' ipotesi che il differenziale sia di 1ª specie su tutta la superficie. Dunque le funzioni a_i sono prive di poli a distanza finita e quindi, oltre ad essere, come sappiamo, razionali, sono intere. Lo stesso ragionamento può ripetersi per Q, e si conchiude che P e Q *sono funzioni razionali intere di x e di y, la prima, rispetto ad x, di grado $p-1$ al massimo, la seconda rispetto ad y, di grado $p-1$ al massimo.*

Raccogliamo in P e Q i termini che sono, al massimo, di grado $p-1$, complessivamente, in x, y e sia, con ciò,

$$P = P_1 + \varDelta \quad , \quad Q = Q_1 + E,$$

P_1 e Q_1 essendo complessivamente in x, y di grado $p-1$ al massimo e $\varDelta, E$ non contenendo termini di grado minore di p.

Ponendo $y=\mu x$ (μ costante) il nostro differenziale si riduce sotto la forma

$$\frac{(\overline{P}_1 + \mu \overline{Q}_1) + x^p(\overline{\varDelta} + \mu \overline{E})}{\sqrt{\overline{\psi}}}\, dx,$$

ove con $\overline{P}_1, \overline{Q}_1, \overline{\psi}$ denotiamo i valori di P_1, Q_1, ψ per $y=\mu x$, e con $\overline{\varDelta}, \overline{E}$ i polinomi, *interi in* x, $\frac{\varDelta(x,\mu x)}{x^p}, \frac{E(x,\mu x)}{x^p}$. Il differenziale precedente dev' essere un differenziale iperellittico di 1ª specie relativo alla curva $z^2=\psi(x,\mu x)$, la quale è al più di genere p. Dev' essere dunque, per qualsiasi valore di μ e di x, $\overline{\varDelta}+\mu\overline{E}=0$, cioè, riponendo per μ il valore $\frac{y}{x}$ e moltiplicando per x^{p+1}, $\varDelta x + E y = 0$.

Sicchè sarà $\varDelta = y F$, $E = -x F$, essendo F una funzione razionale intera di x, y i cui termini sono, al minimo, di grado $p-1$, complessivamente, in x, y. E con ciò il differenziale prende la forma

$$\frac{P_1\, dx + Q_1\, dy + F(y\, dx - x\, dy)}{\sqrt{\psi}}$$

Poniamo ora $y = \mu x + \nu$. Il differenziale precedente diviene (μ e ν essendo costanti)

$$(\alpha) \qquad \frac{\overline{P}_1 + \mu \overline{Q}_1 + \nu \overline{F}}{\sqrt{\psi}} dx,$$

ove $\overline{P}_1, \overline{Q}_1, \overline{F}$ sono i valori di P_1, Q_1, F per $y = \mu x + \nu$. Separiamo in F i termini di grado $p - 1$ da quelli di grado più alto, sia cioè $F = G + S$. ove G è una forma binaria di grado $p - 1$ ed S un polinomio i cui termini sono tutti di grado maggiore di $p - 1$. Osservisi che, essendo

$$S(x, y + h) = S(x, y) + h \frac{\partial S}{\partial y} + \cdots,$$

è

$$S(x, \mu x + \nu) = x^p S'(x, \mu) + \nu \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{y = \mu x} + \cdots$$

ove $S'(x, \mu)$ è un polinomio intero in x. Dovendo essere (α) un differenziale iperellittico relativo alla curva $z^2 = \psi(x, \mu x + \nu)$, di genere p al massimo, deve, per l'arbitrarietà di ν, essere 0 $S'(x, \mu)$, e quindi anche $S(x, y) = 0$, qualunque sieno x ed y, donde F si riduce a G, cioè ad una forma binaria di grado $p - 1$. Si conchiude perciò che:

Qualunque differenziale totale di 1ª specie relativo al piano doppio $z^2 = \psi(x, y)$ *dev' essere della forma*:

$$\frac{P_1 dx + Q_1 dy + F(y dx - x dy)}{\sqrt{\psi}}$$

ove P_1, Q_1 *sono polinomi di grado* $p - 1$, *al massimo, in* x, y, *ed* F *è una forma binaria di grado* $p - 1$ *in* x, y *(che può eventualmente, ridursi a* 0).

Per ciò che in seguito dovremo dire basterà tenere il differenziale sotto la forma

$$(1) \qquad \frac{P\, dx + Q\, dy}{\sqrt{\psi}}$$

tenendo presente che P *e* Q *sono, al massimo, di grado* p, essendo ψ di grado $2p + 2$.

2. Tenendo presente che (1) dev'essere un differenziale totale e che quindi $\dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{P}{\sqrt{\psi}} = \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{Q}{\sqrt{\psi}}$, si ha l'equazione

$$(2) \qquad P\psi_y - Q\psi_x = 2\psi(P_y - Q_x),$$

ove con f_x, f_y si denotino le derivate parziali di una funzione f, rispetto ad x e ad y.

Consideriamo, insieme alla (2), l'equazione differenziale

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \tag{3}$$

e supponiamo, per un momento, che essa ammetta un integrale generale della forma

$$\lambda = \frac{U(x,y)}{V(x,y)},$$

U e V essendo funzioni razionali intere e λ una costante arbitraria: in altri termini supponiamo che le curve integrali della (3) costituiscano il fascio di curve algebriche $U - \lambda V = 0$. Il differenziale (esatto) $d\lambda = d\frac{U}{V}$ differisce allora da $P\,dx + Q\,dy$ per un fattore finito, necessariamente razionale, $\frac{\mu}{\omega}$, ove ω, μ sono polinomi interi in x, y. Poichè, per ipotesi, $\frac{\mu}{\omega}$ e $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ sono due fattori integranti del differenziale $P\,dx + Q\,dy$, necessariamente distinti, il loro quoziente, cioè $\frac{\mu}{\omega}\sqrt{\psi}$, è, com'è noto, funzione dell'integrale $\lambda = \frac{U}{V}$. Sicchè fra $g = \frac{\mu^2}{\omega^2}\psi$ e $\lambda = \frac{U}{V}$ passerà una relazione. Per trovarla, eliminiamo la x fra le due equazioni algebriche $g = \frac{\mu^2}{\omega^2}\psi$, $\lambda = \frac{U}{V}$ (g e λ essendo costanti arbitrarie). Si otterrà così una relazione algebrica fra g, λ ed y; ma, poichè g è funzione della sola λ, y non potrà comparire in tale relazione. Sicchè fra λ e g passerà una relazione *algebrica* del tipo

$$\Phi(\lambda, g) = 0,$$

$\Phi(\lambda, g)$ essendo un polinomio intero in λ e g, non identicamente nullo. Siamo sicuri che $\Phi\left(\frac{U}{V}, \frac{\mu^2}{\omega^2}\psi\right)$ si annulla identicamente. Se consideriamo nel piano (λ, g) la curva di equazione $\Phi(\lambda, g) = 0$, concesso anche, per un momento, che essa sia riducibile, possiamo sempre considerarne la parte irriducibile

$$\varphi(\lambda, g) = 0$$

tale che $\varphi\left(\frac{U}{V}, \frac{\mu^2}{\omega^2}\psi\right)$ si annulli identicamente. La curva $\varphi(\lambda, g) = 0$ è certo razionale, perchè altrimenti noi potremmo considerare un differenziale abeliano di 1ª specie $R\,d\lambda$ legato a tale curva (R funzione razionale di λ e g che non s'annulla identicamente sui punti di quella curva). Allora, riponendo per λ e g i valori $\frac{U}{V}$, $\frac{\mu^2}{\omega^2}\psi$, si otterrebbe un differenziale totale di 1ª specie $\frac{R}{V^2}(V dU - U dV)$ relativo al piano x, y e non identicamente nullo, il che è assurdo. Si può dunque scegliere una funzione razionale t di x e di y tale che g e λ, cioè $\frac{\mu^2}{\omega^2}\psi$, $\frac{U}{V}$, siano funzioni razionali di t. Si abbia dunque:

$$\frac{\mu^2}{\omega^2}\psi = A(t) \quad , \quad \frac{U}{V} = B(t) \quad , \quad t = \frac{\varrho}{\nu} \,,$$

ove $A(t)$, $B(t)$ sono funzioni razionali di t, e ϱ e ν funzioni razionali intere di x, y, *prime fra loro*.

Il nostro differenziale totale di 1ª specie $\frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{\psi}}$, che è eguale a $\frac{d\frac{U}{V}}{\sqrt{\frac{\mu^2}{\omega^2}\psi}}$, perchè, per ipotesi, $d\frac{U}{V} = \frac{\mu}{\omega}(P\,dx + Q\,dy)$, si riduce così al differenziale abeliano $\frac{B'(t)\,dt}{\sqrt{A(t)}}$, relativo alla curva $\zeta^2 = A(t)$, del piano ζ, t. Poichè tale differenziale dev'essere di 1ª specie, il genere della curva $\zeta^2 = A(t)$, evidentemente irreducibile perchè $A(t)$ non è un quadrato (tale non essendo ψ), è almeno 1, sicchè tale curva è ellittica od iperellittica. Intanto osserviamo che sulla nostra superficie, $z^2 = \psi(x, y)$, ad ogni curva del fascio $\varrho - t\nu = 0$, del piano x, y, corrispondono le due curve ove la superficie è incontrata contemporaneamente dal cono (cilindro) $\varrho - t\nu = 0$ e rispettivamente, dalle due superficie $z = \frac{\omega}{\mu}\sqrt{A(t)}$, $z = -\frac{\omega}{\mu}\sqrt{A(t)}$. La serie algebrica ∞^1 di tali curve è un fascio ed è in corrispondenza birazionale colla serie di punti della curva $\zeta^2 = A(t)$; quindi la superficie $z^2 = \psi(x, y)$ possiede un fascio ellittico od iperellittico di curve le cui immagini (doppie) sul piano x, y sono le curve del fascio $\varrho - t\nu = 0$.

Viceversa, una tal superficie possiede, com'è noto, differenziali totali di 1ª specie.

Riassumendo:

Se la superficie $z^2 = \psi(x, y)$ possiede il differenziale totale di 1ª specie $\frac{P\,dx + Q\,dy}{z}$, e l'integrale generale dell'equazione differenziale $P\,dx + Q\,dy = 0$ è della forma $\lambda = R(x, y)$, ove R è simbolo di funzione razionale e λ costante arbitraria, la superficie contiene un fascio ellittico od iperellittico di curve.

3. Vogliamo contare, perchè ciò interessa in seguito, quanti siano, nel nostro caso, i differenziali totali esistenti sulla superficie e linearmente indipendenti. Anzitutto occorre premettere il seguente

LEMMA: *Sulla superficie $z^2 = \psi(x, y)$ (piano doppio) non possono esistere due integrali di differenziali totali di 1ª specie che non siano l'uno funzione dell'altro.*

Difatti, se

$$I = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{\psi}}, \quad J = \int \frac{P'dx + Q'dy}{\sqrt{\psi}}$$

sono due integrali siffatti, sarà (per la (2) del n. 2)

$$P\psi_y - Q\psi_x = 2\psi\,(P_y - Q_x)$$
$$P'\psi_y - Q'\psi_x = 2\psi\,(P'_y - Q'_x)$$

donde

$$(PQ' - P'Q)\psi_x = 2\psi A$$
$$(PQ' - P'Q)\psi_y = 2\psi B,$$

essendo A e B due certi polinomi interi.

Ora si osservi che, essendo $\psi = 0$, curva di diramazione del piano doppio, priva di componenti multiple, solo in un numero finito di punti di essa curva si annullano contemporaneamente ψ_x e ψ_y. In tutti gli altri punti di $\psi = 0$ deve essere $PQ' - P'Q = 0$.

E, poichè ψ è di grado $2p + 2$ mentre $PQ' - P'Q$ e, al massimo, di grado $2p$, dev'essere, identicamente $PQ' - P'Q = 0$ donde l'integrale J è funzione di I.

Premesso questo lemma, se la superficie possiede un fascio ellittico od iperellittico, i differenziali totali di 1ª specie da essa posseduti sono quelli (e solo quelli) i quali provengono dai differenziali iperellittici legati a tale fascio (considerato come ente algebrico ∞^1). Se π è il genere del fascio, il numero di quelli linearmente indipendenti è dunque π.

4. Ora passiamo al teorema che è scopo di questa Nota.

Supponiamo che la superficie $z^2 = \psi(x, y)$ possegga due differenziali totali di 1ª specie, linearmente indipendenti,

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{\psi}}, \quad \frac{P'dx + Q'dy}{\sqrt{\psi}}.$$

Allora, come abbiam visto (n. 3), $PQ' - P'Q = 0$, cioè $\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'}$. Denotando con $\frac{G}{G'}$ la frazione irreducibile valore comune di $\frac{P}{P'}$ e $\frac{Q}{Q'}$, sarà dunque

$$P = GH\ ,\ P' = G'H\ ,\ Q = GK\ ,\ Q' = G'K\ ,$$

H e K essendo polinomi. Allora il differenziale $H\,dx + K\,dy$ ammette come fattori integranti tanto $\frac{G}{\sqrt{\psi}}$ che $\frac{G'}{\sqrt{\psi}}$.

Segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale $Hdx + Kdy = 0$, o, ciò che è lo stesso, $Pdx + Q\,dy = 0$, è $\lambda = \frac{G}{G'}$. Siamo dunque nel caso contemplato nel n. precedente. Si conchiude dunque che:

Se il piano doppio $z^2 = \psi(x, y)$ *possiede almeno due differenziali totali di prima specie, esso possiede un fascio iperellittico di curve. Se* $\pi\ (> 1)$ *è il genere di tal fascio,* π *è anche il numero dei differenziali totali di* 1ª *specie, linearmente indipendenti, appartenenti alla superficie. E la curva di diramazione del piano doppio consta* (*com' è noto*) *di* $2\pi + 2$ *curve appartenenti ad un medesimo fascio irreducibile di curve piane, private delle loro eventuali componenti multiple, contate il massimo numero pari di volte possibile. Anzi, se tal fascio contiene totalmente una curva contata 2 volte, il numero delle curve del fascio di cui componesi la curva di diramazione può ridursi a* $2\pi + 1$.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in modo conforme-coniugato di una superficie su di un'altra.* Nota del dott. UBALDO BARBIERI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Il problema generale: *ricercare se esistono superficie rappresentabili su altre in modo conforme-coniugato* per quanto importante, non ci risulta sia stato trattato da alcuno, se si toglie un breve cenno che lo Stäckel dà su tale specie di rappresentazione in una sua Memoria inserita nei Mathematische Annalen del 1894.

In tale Memoria l'autore pone in equazione il problema, riferendo l'elemento lineare delle superficie alle linee assintotiche; le equazioni risultano, però, piuttosto complicate, e le superficie sferiche, le superficie d'area minima, e quelle su cui le assintotiche si tagliano sotto angolo costante e diverso da $\frac{\pi}{2}$, che l'autore dimostra godere dell'anzidetta proprietà, sono dedotte con considerazioni affatto estranee al detto sistema (1).

(1) In altri due lavori dello stesso autore, sulla teoria generale delle superficie (vedi Leipzige Berichte 48 - (1896); 50 - (1898)) sono di nuovo accennate le superficie su cui le assintotiche si tagliano sotto angolo costante differente da $\frac{\pi}{2}$, e dimostrato che queste sono superficie di rotazione.