ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

dunque

$$P = GH \;,\; P' = G'H \;,\; Q = GK \;,\; Q' = G'K \,,$$

H e K essendo polinomi. Allora il differenziale $H\,dx + K\,dy$ ammette come fattori integranti tanto $\frac{G}{\sqrt{\psi}}$ che $\frac{G'}{\sqrt{\psi}}$.

Segue che l'integrale generale dell'equazione differenziale $H dx + K dy = 0$, o, ciò che è lo stesso, $P dx + Q\,dy = 0$, è $\lambda = \frac{G}{G'}$. Siamo dunque nel caso contemplato nel n. precedente. Si conchiude dunque che:

Se il piano doppio $z^2 = \psi(x\,,y)$ *possiede almeno due differenziali totali di prima specie, esso possiede un fascio iperellittico di curve. Se* $\pi\ (> 1)$ *è il genere di tal fascio,* π *è anche il numero dei differenziali totali di* 1ª *specie, linearmente indipendenti, appartenenti alla superficie. E la curva di diramazione del piano doppio consta* (*com' è noto*) *di* $2\pi + 2$ *curve appartenenti ad un medesimo fascio irreducibile di curve piane, private delle loro eventuali componenti multiple, contate il massimo numero pari di volte possibile. Anzi, se tal fascio contiene totalmente una curva contata 2 volte, il numero delle curve del fascio di cui componesi la curva di diramazione può ridursi a* $2\pi + 1$.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in modo conforme-coniugato di una superficie su di un'altra.* Nota del dott. Ubaldo Barbieri, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

Il problema generale: *ricercare se esistono superficie rappresentabili su altre in modo conforme-coniugato* per quanto importante, non ci risulta sia stato trattato da alcuno, se si toglie un breve cenno che lo Stäckel dà su tale specie di rappresentazione in una sua Memoria inserita nei Mathematische Annalen del 1894.

In tale Memoria l'autore pone in equazione il problema, riferendo l'elemento lineare delle superficie alle linee assintotiche; le equazioni risultano, però, piuttosto complicate, e le superficie sferiche, le superficie d'area minima, e quelle su cui le assintotiche si tagliano sotto angolo costante e diverso da $\frac{\pi}{2}$, che l'autore dimostra godere dell'anzidetta proprietà, sono dedotte con considerazioni affatto estranee al detto sistema (1).

(1) In altri due lavori dello stesso autore, sulla teoria generale delle superficie (vedi Leipzige Berichte 48 - (1896); 50 - (1898)) sono di nuovo accennate le superficie su cui le assintotiche si tagliano sotto angolo costante differente da $\frac{\pi}{2}$, e dimostrato che queste sono superficie di rotazione.

Nella presente ricerca io riduco il problema alla risoluzione di un sistema di equazioni di forma più trattabile, e che meglio si presta allo studio generale di esso.

Il metodo da me seguito mi porta, oltre che alle superficie sferiche, e d'area minima, alla determinazione di un' importante classe di superficie per le quali l'anzidetta rappresentazione è possibile.

È questa la classe delle superficie di rotazione.

Date due superficie S ed S_1, supponiamo che sia possibile di fare una rappresentazione conforme di S_1 su S, in guisa che ad ogni sistema coniugato dell' una, corrisponda un sistema coniugato sull'altra.

Le linee di curvatura $u=$ cost. $v=$ cost. formando un sistema coniugato e ortogonale dovranno corrispondersi sulle due superficie; per conseguenza gli elementi lineari corrispondenti potranno porsi sotto la forma

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2$$
$$ds_1^2 = \mathrm{E}_1\, du^2 + \mathrm{G}_1\, dv^2,$$

ed essendo la rappresentazione conforme dovremo avere

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{G}_1}{\mathrm{G}} = k(u, v). \tag{1}$$

Inoltre, dovendo fra loro corrispondersi i sistemi coniugati, si dovranno corrispondere anche le linee assintotiche, e viceversa; per cui indicando con

$$\mathrm{D}\, du^2 + \mathrm{D}''\, dv^2$$
$$\mathrm{D}_1\, du^2 + \mathrm{D}_1''\, dv^2$$

le seconde forme fondamentali di S ed S_1 rispettivamente, dovrà essere

$$\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{D}_1''}{\mathrm{D}''} = k_1(u, v). \tag{2}$$

Indichiamo con r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura della superficie S. Le due equazioni di Codazzi e di Gauss, relative a tale superficie, potranno scriversi, com'è noto, nel modo seguente [1]:

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{r_2}\right) - \frac{1}{r_1}\frac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{r_1}\right) - \frac{1}{r_2}\frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{du} = 0 \\ & \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right\} = 0 . \end{aligned} \right.$$

[1] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, pag. 273, vol. I.

Tenuto conto delle relazioni (1) e (2), è facile vedere che queste equazioni scritte per la superficie S_1 diventano

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{E}}{r_2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{k_1}{\sqrt{k}}\right)-\frac{k_1}{\sqrt{k}}\frac{1}{r_1}\sqrt{E}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial v}=0\\ &\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k_1}{\sqrt{k}}\right)-\frac{k_1}{\sqrt{k}}\frac{1}{r_2}\sqrt{G}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial u}=0\\ &\frac{k_1^2}{k}\frac{1}{r_1 r_2}-\frac{1}{r_1 r_2}+\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial u}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial v}\right)\right\}=0; \end{aligned}\right.$$

ossia

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{1}{r_1}x\frac{\partial y}{\partial v}=0\\ &\frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{1}{r_2}x\frac{\partial y}{\partial u}=0\\ &x^2\frac{1}{r_1 r_2}-\frac{1}{r_1 r_2}+\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right\}=0, \end{aligned}\right.$$

avendo posto

$$(6)\quad \frac{k_1}{\sqrt{k}}=x \quad \text{e} \quad \log\sqrt{k}=y.$$

Se, dunque, consideriamo data la superficie S, la ricerca delle superficie S_1, rappresentabili in modo conforme-coniugato su S, dipendendo dalla conoscenza dei moltiplicatori k e k_1, è ridotta allo studio del sistema (5).

Pertanto, dalle due prime equazioni si trae

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial\log x}{\partial v}\\ &\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial\log x}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Onde l'ultima diviene

$$x^2\frac{1}{r_1 r_2}+\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial\log x}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial\log x}{\partial v}\right)\right\}-\frac{1}{r_1 r_2}=0.$$

Eliminando poi y dalle (7) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial \log x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)=0 .$$

Avremo, così, il seguente sistema di due equazioni del secondo ordine a cui deve soddisfare la x:

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial \log x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)=0\\ &\frac{1}{r_1 r_2}x^2+\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{r_2}{r_1}\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial \log x}{\partial v}\right)\right\}-\frac{1}{r_1 r_2}=0 .\end{aligned}\right.$$

Determinato, quando sia possibile, un integrale x di questo sistema, le (7) permetteranno di ottenere y per quadrature.

Si vede, dunque, che la ricerca delle superficie S_1 rappresentabili in modo conforme-coniugato sulla data superficie S, è ridotta allo studio del sistema (8).

Si ponga $\log x = z$; e si indichino con p, q, r, s, t le derivate parziali di 1° e 2° ordine per la funzione $z\,(u, v)$; è facile vedere che il sistema (8) si trasformerà allora nel seguente:

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}&s\left(\frac{r_1}{r_2}-\frac{r_2}{r_1}\right)+q\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-p\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=0\\ &r\frac{1}{E}\frac{r_2}{r_1}+p\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\right)+t\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{1}{G}\right)+\\ &\qquad+q\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\right)+\frac{1}{r_1 r_2}(e^{2z}-1)=0 .\end{aligned}\right.$$

A questo punto occorre osservare che se

$$\frac{r_1}{r_2}=\pm 1,$$

la prima equazione è identicamente soddisfatta; il sistema precedente si riduce perciò ad una sola equazione, onde se ne ne conclude che in tal caso esisteranno di certo superficie rappresentabili su S in modo conforme-coniugato.

Al caso di $\frac{r_1}{r_2} = +1$ corrisponde la sfera, che non ha per noi interesse; al caso, invece, di $\frac{r_1}{r_2} = -1$ corrispondono le superficie d'area minima, caso evidente *a priori*, costituendo le assintotiche su queste superficie un sistema ortogonale ed isotermo.

Escludendo, allora, queste due classi di superficie, supporremo

$$\frac{r_1}{r_2} \neq \pm 1.$$

Dalle (9) potremo quindi trarre per s e t le espressioni seguenti:

$$(10)\quad \begin{cases} s = p\,\frac{r_1 r_2}{r_1^2 - r_2^2}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - q\,\frac{r_2 r_1}{r_1^2 - r_2^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \\ t = -\frac{1}{r_1^2}\,\mathrm{G}\,e^{2z} - p\,\frac{r_2}{r^1}\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\right) - \\ \qquad - q\,\frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}\right) - \frac{r_2^2}{r_1^2}\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}\,r + \frac{\mathrm{G}}{r_1^2}. \end{cases}$$

Per vedere se queste due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ammettono o no, una soluzione comune $z(u, v)$, si può seguire il il metodo indicato dal prof. Bianchi [1].

I calcoli che s' incontrano, data la forma complessa delle (10), risultano, però, assai lunghi e complicati; talchè io non ho potuto finora trarne partito per risolvere il problema in modo completo.

Dalla complicazione delle condizioni necessarie a che il problema ammetta sempre soluzioni, si può, tuttavia, dedurre con sicurezza quasi completa che, in genere, data una qualunque superficie S, non ne esisterà un' altra S_1 rappresentabile su quella in modo conforme-coniugato.

Ho cercato, quindi, di dedurre per via indiretta qualche soluzione particolare del sistema (10).

Poniamo per semplicità detto sistema sotto la forma

$$(11)\quad \begin{cases} s = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q \\ t = \alpha(e^{2z} - 1) + \beta p + \gamma q + \delta r, \end{cases}$$

e proponiamoci di ricercare se sia possibile soddisfare ad esso con una funzione di sola v.

[1] *Sulle soluzioni comuni a due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1886.

Ponendo

$$p = 0\,,$$

il sistema precedente diviene

$$(12)\qquad \begin{cases} Bq = 0 \\ t = \alpha(e^{2z} - 1) + \gamma q\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione deduciamo che B o q dovranno esser nulli. Sia q, e quindi ancor t, uguale a zero: si avrà allora

$$\alpha(e^{2z} - 1) = 0\,,$$

donde, non potendo esser nullo α, ricaveremo

$$e^{2z} = 1\,,$$

dalla quale, per essere $z = \log x$ ne risulterà $x^2 = 1$; il che, del resto, poteva prevedersi *a priori*, considerando le (8): questo valore di x^2 ci porta alla rappresentazione per similitudine, priva per noi d'interesse.

Suppongasi ora

$$B = 0 \qquad \text{e} \qquad q\,,t \neq 0:$$

essendo

$$B = -\frac{r_1\,r_2}{r_1^2 - r_2^2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

ne risulterà che $\dfrac{r_1}{r_2}$ dovrà essere funzione di sola v.

La seconda equazione delle (12)

$$(13)\qquad t = \alpha(e^{2z} - 1) + \gamma q\,,$$

diviene un'equazione alle derivate ordinarie, poichè in essa z, e quindi q e t, debbono essere funzioni di sola v.

Se α e γ sono funzioni di sola v, è chiaro che la condizione $z = f(v)$ per gl'integrali della (13) sarà di certo soddisfatta: ma per α e γ funzioni qualunque di u e v, non esisteranno, in genere, delle funzioni $z = f(v)$ che soddisfacciano alla detta equazione.

Si presenta, dunque, la questione di vedere a quali condizioni devono soddisfare α e γ, perchè la (13) abbia delle soluzioni $z = f(v)$.

Detta equazione ci indica per γ il valore

$$\gamma = V\alpha + V_1$$

essendo V e V_1 funzioni incognite di sola V.

Sostituendo tale espressione nella (13), se ne deduce

$$t - V_1\,q = \alpha(Vq + e^{2z} - 1).$$

Se α non è funzione di sola v, caso già considerato, questa equazione non potrà essere soddisfatta se non è contemporaneamente

$$(13') \qquad \begin{cases} t - V_1 q = 0 \\ Vq + e^{2z} - 1 = 0 . \end{cases}$$

Cerchiamo allora le condizioni d'integrabilità di questo sistema.

Indichiamo con λ una funzione della sola v, e poniamo $V_1 = \frac{\lambda''}{\lambda'}$.

L'integrazione della 1^a equazione del sistema dà

$$q = a\lambda'$$

ossia

$$z = a\lambda + b$$

essendo a e b costanti.

Sostituendo questa espressione di z nella 2^a si trae

$$(14) \qquad aV\lambda' + ce^{2a\lambda} - 1 = 0 ,$$

che dovrà essere soddisfatta per certi valori delle costanti arbitrarie che vi figurano.

Si conclude:

Affinchè il sistema (13') ammetta delle soluzioni (si esclude la soluzione $z = 0$ che per noi non ha interesse) è necessario e basta che i coefficienti V_1 e V siano legati da una relazione della forma (14).

E perciò:

L'equazione (13) ha delle soluzioni funzioni soltanto di v, in due casi:

1) quando α e γ sono funzioni unicamente di v.

2) quando α e γ, pur essendo funzioni di u e v, sono legati da una relazione della forma

$$\gamma = \frac{1 - ce^{2a\lambda}}{a\lambda'}\alpha + \frac{\lambda''}{\lambda'} ,$$

ove λ è funzione qualunque di v; a e c costanti, ed α e γ hanno le espressioni

$$\alpha = -\frac{G}{r_1^2} \quad , \quad \gamma = -\frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\right).$$

Tralasciando questo secondo caso, ci occuperemo nella Nota presente, soltanto del primo.

Siano, dunque, α e γ funzioni di sola v, cioè

$$\frac{G}{r_1^2} = V \quad , \quad \frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\right) = V_1 .$$

La seconda equazione di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)-\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

si ridurrà a

$$\frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)=0, \quad \text{da cui} \quad G=G(v);$$

segue subito allora

$$r_1=r_1(v) \qquad r_2=r_2(v) \qquad E=E(v).$$

L'elemento lineare della superficie S avrà quindi la forma

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2,$$

con E e G funzioni di sola v.

Posto allora $\sqrt{G}\,dv=dv_1$, si avrà

$$ds^2=E_1\,du^2+dv_1^2, \tag{15}$$

con E_1 funzione di sola v_1.

Questo è l'elemento lineare di una superficie applicabile su di una superficie di rotazione, di cui i meridiani e i paralleli sono rispettivamente dati da

$$u=\text{cost.}$$
$$v=\text{cost.}$$

I raggi principali di curvatura risultano, come appunto deve essere, funzioni di v, ossia di v_1, parametro che individua i paralleli.

Se ne deduce, quindi, *che per ogni superficie di rotazione è possibile una rappresentazione conforme-coniugata su di altra superficie, la quale, evidentemente, non potrà essere che di rotazione anch'essa.*

Analogo risultato si ottiene supponendo la z funzione di sola u, e quindi $q=0$.

In una prossima Nota tratteremo direttamente la risoluzione del problema per questa classe speciale di superficie.

Fisica matematica. — *Sopra i conduttori cavi.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.