ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Matematica. — *Sur la multiplication de deux séries de factorielles.* Nota di NIELS NIELSEN, presentata dal Socio U. DINI.

Dans mes recherches [1] sur les séries de factorielles de cette forme

$$(1)\qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)(x+2)\dots(x+s)}\,,\ \Re(x) > A\ ^{(2)},$$

où le coefficients b_s sont indépendants de x, j'ai démontré que toutes les fonctions dèveloppables dans une telle série doivent se présenter sous forme d'une certaine intégrale définie, savoir

$$(2)\qquad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt\,,$$

où la fonction $\varphi(t)$, *la fonction génératrice de* $\Omega(x)$, doit satisfaire aux conditions suivantes:

1°. $\varphi(t)$ doit être holomorphe aux environs du point $t=1$, de façon que la série de puissances correspondante

$$(3)\qquad \varphi(1-t) = b_0 + b_1 t + b_2 t + b_3 t^3 + \cdots,$$

où les coefficients b_s sont les mêmes qui figurent dans la série de factorielles (1), a son rayon de convergence égal à 1 au moins.

2°. Si le point $t=0$ est point singulier de $\varphi(t)$, il doit être tel que $\varphi(t)$ ait pour $t=+0$, des dérivées d'un ordre quelconque; de plus, soit $\varphi^{(p)}(t)$ la première de ces dérivées, p étant un positif entier fini, qui deviendra infini pour $t=+0$, il doit être possible de déterminer un nombre réel et fini λ, tel que

$$(4)\qquad \lim_{t=+0} \left| t^{x+p}\, \varphi^{(p)}(t) \right| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases},$$

selon que $\Re(x) \gtrless \lambda$.

La désignation $t=+0$ indique comme ordinairement que la quantité t destinée à décroître indéfiniment doit être considerée toujours comme positive.

Nous désignons λ comme *premier nombre caractéristique* de la fonction génératrice $\varphi(t)$.

[1] Comptes rendus, 30 décembre 1901, 20 janvier 1902. Annales de l'École Normale, t. 19, pp. 409-453, 1902.

[2] Ici et dans ce qui suit la lettre gothique $\Re$(X) désigne la partie réelle de x.

3°. Il existe, en vertu de la série de puissances (3), un autre nombre réel λ', tel que

$$\lim_{t=1-0} \left| \frac{\varphi^{(n)}(t)}{\Gamma(x+n+1)} \right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > \mathrm{E}, \end{matrix} \tag{5}$$

selon que $\Re(x) \gtrless \lambda'$, et pourvu que n soit plus grand que ou égal à un certain nombre positif entier N. E et ε désignent deux nombres positifs respectivement aussi grand et aussi petit qu'on le veut; λ' est désigné comme *second nombre caractéristique* de $\varphi(t)$.

Inversement, comme le montre clairement des intégrations par parties, toutes les intégrales définies de la forme (2) sont développables en série de factorielles de la forme (1).

Quant au champ de convergence de la série de factorielles ainsi obtenue, il se détermine à l'aide des deux nombres caractéristiques λ et λ' de la manière suivante:

1°. Si le point $t = 1$ est le seul point singulier de $\varphi(1-t)$ situé dans la circonférence du cercle $|t| = 1$ (c'est-à-dire $t = +0$ pour $\varphi(t)$), la série de factorielles $\Omega(x)$ est convergente dans le demi-plan situé à droite de la ligne $\Re(x) = \lambda$ perpendiculaire à l'axe des nombres réels.

2°. Supposons que $\varphi(1-t)$ n'ait pas des points singuliers dans la circonférence du cercle susdit, la série $\Omega(x)$ est convergente dans toute l'étendue du plan des x.

3°. Dans le cas où $\varphi(1-t)$ a des points singuliers dans la circonférence susdite, outre $t=1$, la série $\Omega(x)$ est convergente, pourvu que $\Re(x)$ soit plus grand que λ et λ' à la fois.

4°. Si le point $t = 1$ n'est pas singulier de $\varphi(t)$, le champ de convergence de $\Omega(x)$ est limité par la ligne droite $\Re(x) = \lambda'$.

Cela posé, on voit que les séries de factorielles présentent cette propriété singulière:

Il peut arriver que l'on trouve dans le champ de convergence de $\Omega(x)$ des points isolés $0, -1, -2, \ldots$ qui sont des pôles simples; mais la série $\Omega(x-\omega)$, où ω désigne un tel point, et toujours convergente, pourvu que $|x-\omega| < \varepsilon$, où ε désigne une quantité positive aussi petite qu'on le veut.

Cette propriété d'une série de factorielles, savoir que la limite de son champ de convergence n'est pas nécessairement déterminée par le premier point singulier de la fonction en question, est d'un point de vue analytique d'un intérêt extrêmement grand.

De plus, nous aurons cette autre propriété singulière:

Supposons convergente la série $\Omega(x)$, $\Omega(x+1)$ sera toujours absolument convergente; c'est-à-dire que nous aurons constamment cette valeur limite: $\lambda - \lambda' \leqq 1$.

En effet, posons

$$\Gamma_n(x) = \frac{1.2.3 \dots (n-1) . n^x}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \quad , \quad \lim_{n=8} \Gamma_n(x) = \Gamma(x) \, ,$$

puis mettons $x = \xi + i\eta$, $x' = \xi' + i\eta'$, nous aurons évidemment

$$(6) \qquad \left| \frac{x'(x'+1) \dots (x'+n-1)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \right| = \left| \frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_n(x')} \right| . \, n^{\xi'-\xi}$$

ce qui nous conduira immédiatement à la proposition susdite.

Dans mes recherches susdites j'ai étudié, à l'aide des conditions précédentes, quelques-unes des opérations analytiques fondamentales effectuées sur une série de factorielles; dans la Note que voici je me suis proposé d'étudier la multiplication de deux séries de factorielles, opération fondamentale qui nous conduira aussi à des propriétés très singulières de telles séries.

A cet égard, introduisons cette nouvelle série de factorielles

$$(7) \qquad \Omega_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! \, c_s}{x(x+1) \dots (x+s)} \quad , \quad \Re(x) > \Lambda' \, ,$$

ou bien

$$(8) \qquad \Omega_1(x) = \int_0^1 \psi(t) \, t^{x-1} \, dt \, ,$$

et désignons par λ_1 et λ_1' les deux nombres caractéristiques de $\psi(t)$, nous verrons tout d'abord que dans le domaine commun de convergence absolue de $\Omega(x)$ et $\Omega_1(x)$ on peut multiplier ces deux séries en appliquant la règle de Cauchy. Cependant, une telle méthode semble être presque impossible pour démontrer que le produit $\Omega(x) . \Omega_1(x)$ est développable en série de factorielles et pour la détermination de la fonction génératrice correspondante. C'est pourquoi nous avons à suivre un chemin entièrement différent.

En effet, étudions d'abord le cas particulier, où l'une des séries de factorielles en question se réduit à un seul terme, savoir à

$$\frac{n! \, c_n}{x(x+1) \dots (x+n)} \, ,$$

nous avons avant de tout à développer en série de factorielles le produit particulier ainsi obtenu.

Pour trouver un tel développement écrivons sous cette forme la formule (2):

$$\Omega(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \cdot t^{x+n} \, dt \, ,$$

puis prenons comme fonction génératrice le produit

$$\Phi(t) = \varphi(t) \,.\, t^{-n-1}$$

nous aurons sans peine ce dévéloppement nouveau

$$(9) \qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, \mathrm{B}_{n,s}}{(x+n+1)(x+n+2)\dots(x+n+s+1)},$$

valable pourvu que nous ayons à la fois

$$(9\,bis) \qquad \Re(x) > 0 \,, \quad \Re(x) > \varLambda \,,$$

et où nous avons posé pour abréger

$$(10) \qquad \mathrm{B}_{n,s} = \sum_{r=0}^{r=s} \binom{n+r}{r} \,.\, b_{s-r} \,.$$

En effet, nous verrons que le premier nombre caractéristique de $\Phi(x)$ est égal à $\lambda + n + 1$, quant au second nombre caractéristique, désignons par δ une quantité positive et finie telle que $\delta - \lambda' > 0$, mais étant aussi petite qu'on le veut, nous aurons, en vertu de (5),

$$n!\,|b_n| = |\varphi^{(n)}(1)| < \mathrm{K} \,.\, \Gamma(\delta + n + 1)\,,$$

où K désigne une quantité positive et finie même pour n infini, ce qui donnera, en vertu de (10),

$$s!\,|\mathrm{B}_{n,s}| < \mathrm{K} \,.\, \sum_{r=0}^{r=s} \frac{r!\,n!\,(s-r)!}{s!\,(n+r)!} \cdot \Gamma(\delta + s - r + 1)\,,$$

ou, ce qui vaut autant,

$$s!\,|\mathrm{B}_{n,s}| < \mathrm{K} \,.\, \mathrm{F}(n+1\,, -s\,, -\delta - s\,, 1) \,.\, \Gamma(\delta + s + 1)\,,$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire, ce qui donnera, en vertu d'une formule de Gauss,

$$(10\,bis) \qquad s!\,|\mathrm{B}_{n,s}| < \mathrm{K} \cdot \frac{\Gamma(\delta + s + n + 2)}{\Gamma(\delta + n + 2)}\,,$$

ce qui montre clairement que la série de factorielles (9) est convergente, pourvu que $\Re(x)$ satisfasse aux conditions (9 *bis*).

Cela posé, nous avons évidemment cet autre développement en série de factorielles

$$(11) \qquad \frac{n!\, c_n}{x(x+1)\dots(x+n)} \cdot \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n!\, s!\, c_n\, \mathrm{B}_{n,s}}{x(x+1)\dots(x+n+s+1)},$$

qui est convergente, même pour n infini, pourvu que nous ayons à la fois

(11 *bis*) $$\Re(x) > 0\,, \quad \Re(x) > \varLambda\,, \quad \Re(x) > \varLambda'\,;$$

de plus, nous verrons que la série de factorielles (11) est *absolument* convergente, pourvu que

(12) $$\Re(x) > 0\,, \quad \Re(x) > \varLambda + 1\,, \quad \Re(x) > \varLambda'.$$

Supposons maintenant que s soit un nombre fixe, puis considérons cette autre série de factorielles

(13) $$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, s!\, c_n\, \mathrm{B}_{n,s}}{x(x+1)\ldots(x+n+s+1)}\,,$$

nous avons, en choisissant le nombre δ figurant dans (10 *bis*), tel que $\delta - \lambda'_1 > 0$, aussi,

$$n!\,|c_n| < \mathrm{K}'.\,\Gamma\,(\delta + n + 1)\,,$$

ce qui donnera, en vertu de (10 *bis*),

$$n!\,s!\,|c_n|\,.\,|\mathrm{B}_{n,s}| < \frac{\mathrm{KK}'}{\delta + n + 1}\cdot \Gamma(\delta + n + 2)\,,$$

ce qui montrera, à l'aide de (6), que la série de factorielles (13) est *absolument* convergente, pourvu que $\Re(x)$ satisfasse aux conditions (11 *bis*).

Cela posé, mettons dans (11) $n = 0\,, 1\,, 2\,, 3\,, 4\,, \ldots$, puis ajoutons toutes les équations ainsi obtenues, nous obtiendrons une série à double entrée, dont toutes les séries horizontales et verticales seront absolument convergentes, pourvu que les conditions (12) soient remplies; c'est-à-dire que nous avons certainement dans ce cas

(14) $$\Omega(x)\,.\,\Omega_1(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\mathrm{A}_r}{x(x+1)\ldots(x+r+1)}\,,$$

où nous avons posé pour abréger

(14 *bis*) $$\mathrm{A}_r = \sum_{s=0}^{s=r} (r-s)!\,s!\,c_{r-s}\,.\,\mathrm{B}_{r-s,s}\,.$$

Remarquons maintenant qu'il est permis de permuter dans (12) les deux nombres $\varLambda$ et $\varLambda'$, il est évident que la série de factorielles (14) est convergente pourvu que les conditions (11 *bis*) soient remplies seulement; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général:

Le produit des deux séries de factorielles $\Omega(x)$ et $\Omega_1(x)$, convergentes pourvu que nous ayons respectivement $\Re(x) > \varLambda$ et $\Re(x) > \varLambda'$, est développable en série de factorielles convergente, pourvu que nous ayons à la fois $\Re(x) > 0$, $\Re(x) > \varLambda$ et $\Re(x) > \varLambda'$.

On voit, ce qui était à attendre du reste, que le coefficient A_r est très compliqué.

Cherchons maintenant la fonction génératrice $\chi(t)$ qui correspond à la série de factorielles susdite, nous avons à chercher d'abord la fonction génératrice $\Phi_n(t)$ de la fonction plus simple

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot \Omega(x).$$

Or, supposons que $\Phi_n(t)$ ait dans le point $t = 1$ un zéro du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre, nous aurons évidemment, en intégrant par parties

$$\int_0^1 \Phi_n(t)\, t^{x-1}\, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot \int_0^1 \Phi_n^{(n+1)}(t)\, t^{x+n}\, dt,$$

de sorte que l'intégrale définie figurant au second membre de cette formule deviendra précisément égale à $\Omega(x)$, si nous posons

$$(-1)^{n+1}\, \Phi_n^{(n+1)}(t)\, t^{n+1} = \varphi(t),$$

ou, ce qui vaut autant,

$$\Phi_n(t) = (-1)^{n+1} \cdot \int^{(n+1)} \frac{\varphi(t)}{t^{n+1}} \cdot dt^{n+1},$$

d'où, en appliquant une formule bien connue, due à Th. Claussen [1]

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n!} \cdot \int_t^1 \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \cdot d\alpha + c'_0 + c'_1\, t + \cdots + c'_n t^n,$$

où les coefficients c'_n sont complètement arbitraires.

Or, je dis que le polynome arbitraire figurant au second membre de cette formule doit s'évanouire, parce que l'intégrale définie a dans $t = 1$ un zéro du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre; c'est-à-dire que nous avons démontré cette formule auxiliaire

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot \Omega(x) &= \int_0^1 \Phi_n(t)\, t^{x-1}\, dt, \\ \Phi_n(t) &= \frac{1}{n!} \cdot \int_t^1 \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

[1] Journal de Crelle, t. IV, pag. 278.

Cela posé, appliquons cette série de puissances

$$\psi(1-t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (15), cet autre théorème remarquable:

Pour le produit des deux séries de factorielles

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt\,, \quad \Omega_1(x) = \int_0^1 \psi(t)\, t^{x-1}\, dt\,,$$

nous aurons cette expression intégrale

$$\Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \int_0^1 \chi(t)\, t^{x-1}\, dt\,, \tag{16}$$

où la nouvelle fonction génératrice $\chi(t)$ se détermine à l'aide de cette expression simple

$$\chi(t) = \int_t^1 \psi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_t^1 \varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha\,. \tag{16bis}$$

L'identité des deux intégrales définies figurant dans (16*bis*) est évidente, parce que la substitution $\beta = \frac{t}{\alpha}$ nous transforme l'une de ces deux intégrales dans l'autre.

Supposons par exemple

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) = \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt\,,$$

nous aurons aisément

$$(\beta(x))^2 = \int_0^1 \frac{2\log(1+t) - 2\log 2 - \log t}{1+t} \cdot t^{x-1}\, dt\,, \tag{17}$$

formule particulière que j'ai démontrée récemment [1] à l'aide d'un calcul direct. La série de factorielles obtenue pour $\beta(x)$ est convergente dans toute l'étendue du plan des x à l'exception dans les points isolés $0, -1, -2, -3, \ldots$, tandis que la série de factorielles obtenue pour $(\beta(x))^2$ n'est convergente que si $\Re(x) > 0$.

Posons encore

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) = \beta_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2-t}\, dt\,,$$

nous aurons de même

$$(\beta_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{2\log(2-t) - \log t}{4-t} \cdot t^{x-1}\, dt\,; \tag{18}$$

[1] Annali di Matematica, t. IX, pag. 293, 1903.

considérons les deux séries de factorielles correspondantes, savoir

$$(19) \qquad \beta_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{x(x+1)\dots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0,$$

$$(19\,bis) \qquad (\beta_1(x))^2 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)!\, a_{s+1}}{x(x+1)\dots(x+s+1)}, \quad \Re(x) > 0,$$

où nous avons posé pour abréger

$$a_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s}{s \,.\, 3^{n-s+1}} (1-(-1)^s).$$

Or, il est évident que la série (19) est *absolument* convergente, pourvu que $\Re(x) > 1$, quant à (19 *bis*), posons $r = \frac{n}{2}$ ou $r = \frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair, nous aurons aisément

$$|a_n| < \frac{1}{3^{n-r}} + \frac{1}{n-r};$$

c'est-à-dire que la série (19 *bis*) est toujours *absolument* convergente, d'où cette proposition très singulière, ce me semble:

Il peut arriver que la série de factorielles obtenue pour le produit $\Omega(x) . \Omega_1(x)$ est absolument convergente dans la bande du plan des x, où les séries de factorielles données $\Omega(x)$ et $\Omega_1(x)$ ne sont pas absolument convergentes, bande dont la largeur ne peut jamais être plus grande que l'unité.

Remarquons, en terminant ces recherches, que les formules intégrales (16) sont valables quand les deux intégrales données $\Omega(x)$ et $\Omega_1(x)$ ont un sens toutes les deux. En effet, notre démonstration précédente est valable, même dans le cas où la série de puissances (3) n'existe pas. Or, une recherche plus approfondie de cette question nous conduirait beaucoup trop loin ici.

Meccanica. — *Sul problema dell'equilibrio elastico di un cilindro circolare indefinito.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.