ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 7 agosto 1904.

Fisica matematica. — *Le deformazioni ausiliarie nei problemi alterni d'equilibrio elastico.* Nota del Corrispondente C. SOMIGLIANA (¹).

1. Come si è visto, la determinazione della deformazione nei problemi alterni considerati era ridotta alla costruzione di una deformazione speciale ausiliaria, la quale godesse delle seguenti proprietà: 1° di avere un punto di infinito isolato di 1° ordine nello spazio S occupato dal corpo elastico; 2° di essere rappresentata *in tutto lo spazio* da un vettore-spostamento costituente un campo simmetrico, ed antisimmetrico, rispetto al gruppo dei piani, che dividevano lo spazio in campi simmetrici o congruenti ad S. Tali deformazioni ausiliarie risultavano così perfettamente analoghe, dal punto di vista analitico, alle funzioni con cui si risolvono i problemi d'elettrostatica col metodo di Green. Però il metodo indicato per determinarle portava ad espressioni assai complicate, in quanto ogni terna del gruppo di integrali, di cui erano composte, si otteneva da una terna iniziale mediante due sostituzioni ortogonali applicate rispettivamente alle variabili indipendenti ed alle componenti del vettore-spostamento.

Mi propongo ora di stabilire alcune proprietà che permettono di costruire in modo assai semplice le deformazioni ausiliarie considerate, e servono anche a metterne in chiara luce la struttura analitica.

(¹) Continuazione della Nota a pag. 307 del vol. XIII, 1° sem. 1904.

Consideriamo, come nella Nota *Sul principio della immagini di Lord Kelvin e le equazioni della elasticità* (1), un mezzo elastico cristallino avente per piani di simmetria i piani $z = \text{cost}$. Noi potremo scrivere le equazioni d'equilibrio sotto la forma

$$\Delta_{i1} u + \Delta_{i2} v + \Delta_{i3} w = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

dove le Δ_{is} sono simboli di operazioni che si riducono a somme di derivate seconde con coefficienti costanti. Gli integrali di questo sistema, come quelli delle equazioni generali, si possono esprimere mediante tre funzioni φ, ψ, χ le quali soddisfacciano alla unica equazione

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{vmatrix} f = \Delta f = 0 .$$

mediante le formole

$$u, v, w = V_{i1} \varphi + V_{i2} \psi + V_{i3} \chi \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

dove le V_{is} sono le operazioni rappresentate dai minori corrispondenti al termine V_{is} nel determinante simbolico precedente (2). Le tre funzioni φ, ψ, χ possono chiamarsi come già feci in altra occasione, la *terna generatrice* degli integrali u, v, w.

Ora conviene osservare che se invertiamo la direzione dell'asse delle z, cioè mutiamo z in $-z$, le operazioni

$$\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{12}$$

rimangono invariate di forma, mentre le operazioni

$$\Delta_{13}, \Delta_{23}$$

mutano di segno. Ne segue che anche le operazioni

$$V_{11}, V_{22}, V_{33}, V_{12}$$

rimangono invariate, mentre mutano di segno le

$$V_{13}, V_{23}.$$

Ora, tenendo conto di questa osservazione, se noi nei secondi membri delle (2) mutiamo z in $-z$, questi divengono

$$\begin{gathered} V_{11} \varphi(x, y, -z) + V_{12} \psi(x, y, -z) - V_{13} \chi(x, y, -z) \\ V_{12} \varphi(x, y, -z) + V_{22} \psi(x, y, -z) - V_{23} \chi(x, y, -z) \\ -V_{13} \varphi(x, y, -z) - V_{23} \psi(x, y, -z) + V_{33} \chi(x, y, -z). \end{gathered}$$

Di qui segue immediatamente che gli integrali riflessi, rispetto al piano $z = 0$, degli integrali (2), cioè le funzioni

$$u' = u(x, y, -z) \ , \ v' = v(x, y, -z) \ , \ w' = -w(x, y, -z)$$

(1) Vol. XI di questi Rendiconti, 1° sem. 1902, pag. 146.

(2) Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, T. I.

potranno ancora essere rappresentati mediante le (2) stesse, purchè in queste formole alle funzioni φ , ψ , χ si sostituiscono le funzioni

$$\varphi' = \varphi(x , y , -z) \;,\; \psi' = \psi(x , y , -z) \;,\; \chi' = -\chi(x , y , -z).$$

In altri termini, se noi consideriamo le funzioni φ , ψ , χ come le componenti di un vettore (*generatore* degli integrali u , v , w) gli integrali riflessi avranno per vettore-generatore il vettore riflesso.

Questa proprietà può essere assai utile in molti casi, poichè il campo del vettore-generatore è in generale rappresentato da funzioni più semplici di quelle che rappresentano il campo del vettore-spostamento.

2. Un'altra proprietà di cui dovremo far uso è la seguente. Consideriamo un vettore il quale in tutto il campo abbia *direzione costante*, mentre d'altra parte la sua grandezza può variare in modo qualunque. Se l , m , n sono i coseni di questa direzione, esso avrà componenti della forma

$$u = l\,\Omega(x , y , z) \;,\; v = m\,\Omega(x , y , z) \;,\; w = n\,\Omega(x , y , z)$$

essendo $\Omega(x , y , z)$ una funzione qualsiasi. Il vettore riflesso rispetto al piano $z = 0$, avrà per componenti

$$u = l\,\Omega(x , y , -z) \;,\; v = m\,\Omega(x , y , -z) \;,\; w = -n\,\Omega(x , y , -z)$$

ed avrà quindi esso pure direzione *costante* in tutto il campo, e precisamente la direzione simmetrica di quella del vettore primitivo.

Componendo i due campi precedenti noi otterremo un campo simmetrico od antisimmetrico rispetto al piano $z = 0$, ma che non è più, in generale, a direzione costante.

Più in generale supponiamo di avere un gruppo simmetrico di n piani; fissata una direzione arbitraria l_1 , m_1 , n_1, noi possiamo immaginare il gruppo di $2m$ direzioni che insieme alla data sono simmetriche rispetto al gruppo dato dei piani. Questo gruppo di direzioni si otterrà riflettendo successivamente la direzione data sui piani del gruppo in tutti i modi possibili. Indicheremo con l_i , m_i , n_i i coseni di direzione di queste rette ottenute colla operazione di ordine i.

Siano inoltre

$$x_i = x_i(x , y , z) \qquad y_i = y_i(x \cdot y , z) \qquad z_i = z_i(x , y , z)$$
$$i = 1 , 2 , \ldots , 2m$$

le $2m$ sostituzioni dal gruppo che mutano, cioè, un punto qualsiasi x , y , z nei $2m - 1$ rimanenti, secondo l'ordine prestabilito.

Partendo dal vettore

$$u_1 = l_1\,\omega(x , y , z) \qquad v_1 = m_1\,\omega(x , y , z) \qquad w_1 = n_1\,\omega(x , y , z)$$

noi otterremo, per ciò che precede, tutti i vettori del gruppo ponendo

$$u_i = l_i\,\omega(x_i , y_i , z_i) \qquad v_i = m_i\,\omega(x_i , y_i , z_i) \qquad w_i = n_i\,\omega(x_i , y_i , z)$$

cioè *i vettori del gruppo saranno tutti a direzione costante, e le loro direzioni formeranno un gruppo di direzioni.*

Il campo simmetrico od antisimmetrico corrispondente si otterrà ponendo

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i \, l_i \, \omega(x_i \, , y_i \, , z_i) \\
v &= \sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i \, m_i \, \omega(x_i \, , y_i \, , z_i) \\
w &= \sum_{i=1}^{2m} \varepsilon_i \, n_i \, \omega(x_i \, , y_i \, , z_i)
\end{aligned}
$$

dove $\varepsilon_i = 1$ nel caso della simmetria ed $\varepsilon_i = (-1)^{i+1}$ nel caso dell'antisimmetria.

La costruzione di questi gruppi si ottiene quindi in modo molto semplice: 1° costruendo il gruppo delle $2m$ direzioni $l_i \, , m_i \, , n_i$ simmetriche della direzione data; 2° costruendo le $2m$ funzioni che risultano dalla $\omega(x \, , y \, , z)$ colle $2m$ sostituzioni del gruppo, ossia, possiamo dire costruendo le $2m$ funzioni simmetriche della $\omega(x \, , y \, , z)$ rispetto al gruppo dei piani dati.

3. L'applicazione di questi risultati alla determinazione delle deformazioni ausiliarie precedentemente considerate si può fare immediatamente. Noi possiamo fissare che il campo del vettore-generatore in queste deformazioni ausiliarie sia appunto un campo a direzioni costanti, e allora basterà prendere per la funzione $\omega(x \, , y \, , z)$ un integrale dell'equazione

$$\Delta f = 0$$

e costruire la deformazione generata dal vettore che ha per componenti $\varphi \, , \psi \, , \chi$ i secondi membri delle (3), dove per direzione $l_1 \, , m_1 \, , n_1$ si è presa una direzione arbitraria.

Si otterrà così una deformazione il cui vettore-spostamento è simmetrico od antisimmetrico rispetto al gruppo dei piani dati. Se poi l'integrale $\omega(x \, , y \, , z)$ non è regolare, ma vien scelto il modo che gli spostamenti corrispondenti abbiano un punto d'infinito isolato di primo ordine, gli spostamenti così costruiti daranno la deformazione ausiliaria cercata. È noto che tali integrali esistono in generale.

Finalmente la direzione $l_1 \, , m_1 \, , n_1$ potrà poi essere determinata in maniera che nelle formole integrali definitive si ottenga lo spostamento secondo una direzione qualsiasi prefissata.

Questo metodo applicato al caso della isotropia porta a risultati di notevole semplicità ed eleganza. Ne daremo qualche esempio.

4. Le formole (2) per l'isotropia prendono la forma [1]

$$
(4) \qquad
\left|
\begin{aligned}
u &= (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Omega^2 \Delta_2 \varphi \\
v &= (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \Omega^2 \Delta_2 \psi \\
w &= (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \Omega^2 \Delta_2 \chi
\end{aligned}
\right.
$$

[1] Cfr., *Sopra gli integrali delle equazioni della isotropia elastica.* Nuovo Cimento, S. 3, V. 36.

ove

$$\Theta = \frac{\partial \varphi}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}$$

e l'equazione cui devono soddisfare le φ, ψ, χ, si riduce di quarto ordine e diviene

$$\Delta_2 \Delta_2 f = 0 .$$

Osservando che le (4) hanno la stessa forma delle equazioni d'equilibrio, si conclude subito che esse sono invarianti per un cambiamento qualsiasi di assi, e che quindi per un tale cambiamento le funzioni φ, ψ, χ verranno sostituite dalle componenti secondo i nuovi assi del vettore (φ, ψ, χ). Questa grandezza vettoriale si presenta quindi spontaneamente nella rappresentazione di una deformazione, come il vettore dello spostamento, il vettore che rappresenta la rotazione elementare, ecc.

Nel caso nostro gli spostamenti, coi quali si dovevano dapprima comporre le deformazioni ausiliarie, risultavano per successive riflessioni dagli spostamenti (13) della Nota precedente, i quali rientrano nella forma (4) quando si ponga

$$\varphi = r \qquad \psi = \chi = 0 .$$

Il campo del loro vettore-generatore è quindi un campo a direzione costante. Noi prenderemo questi spostamenti sotto una forma più generale ponendo

$$\varphi = l_1 r \qquad \psi = m_1 r \qquad \chi = n_1 r$$

ove l_1, m_1, n_1 sono i coseni di una direzione arbitraria. La funzione

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2 + (z-c)^2}$$

viene così a prendere il posto della $\omega(x, y, z)$ delle formole precedenti e le (4) divengono così:

$$(5) \qquad \begin{aligned} u_1 &= (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(l_1 \frac{\partial r}{\partial x} + m_1 \frac{\partial r}{\partial y} + n_1 \frac{\partial r}{\partial z} \right) + \frac{2\Omega^2}{r} l_1 \\ v_1 &= (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(l_1 \frac{\partial r}{\partial x} + m_1 \frac{\partial r}{\partial y} + n_1 \frac{\partial r}{\partial z} \right) + \frac{2\Omega^2}{r} m_1 \\ w_1 &= (\omega^2 - \Omega^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(l_1 \frac{\partial r}{\partial x} + m_1 \frac{\partial r}{\partial y} + n_1 \frac{\partial r}{\partial z} \right) + \frac{2\Omega^2}{r} n_1 \end{aligned}$$

La costruzione del gruppo corrispondente si riduce alla costruzione del gruppo delle direzioni simmetriche ad (l_1, m_1, n_1), il che sappiamo fare, ed alla determinazione delle $2m - 1$ funzioni che si ottengono da r colle sostituzioni del gruppo applicate alle variabili x, y, z.

Ora possiamo dimostrare che queste funzioni hanno relazioni molto semplici con r.

Avremo infatti in questo caso

$$\omega(x_i, y_i, z_i) = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2}$$

cioè la funzione $\omega(x_i, y_i, z_i)$ è la distanza del punto (a, b, c) dal punto che si ottiene da (x, y, z) colla operazione d'ordine i, che possiamo chiamare S_i. Se ora al sistema dei due punti (x_i, y_i, z_i) (a, b, c) applichiamo l'operazione S_i^{-1} (inversa di S_i) il punto (x_i, y_i, z_i) ritorna in (x, y, z) ed il punto (a, b, c) andrà ad occupare una delle posizioni (a_s, b_s, c_s) che si ottengono da (a, b, c) colle stesse operazioni del gruppo. Ma le operazioni che noi consideriamo non alterano le distanze (essendo o simmetrie o conguenze); avremo dunque

$$\sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2} = \sqrt{(x - a_s)^2 + (y - b_s) + (z - c_s)^2}.$$

Di qui segue che *il gruppo delle funzioni* $\omega(x_i, y_i, z_i)$ *nel nostro caso non è altro che il grurpo delle distanze del punto* (x, y, z) *dai* $2m$ *punti* (a_i, b_i, c_i) [1]. Questa osservazione è assai utile poichè ne segue che gli spostamenti riflessi degli spostamenti (5), rispetto ad un piano qualsiasi del gruppo, si otterranno sostituendo alle costanti a, b, c, ed l_1, m_1, n_1 che compariscono come parametri, le corrispondenti costanti a_s, b_s, c_s, ed l_i, m_i, n_i. La forma degli spostamenti stessi rimane quindi inalterata, per quanto riguarda le variabili indipendenti.

Possiamo ora riassumere il risultato a cui siamo arrivati nel modo seguente.

Fissato un punto $(a_1 . b_1, c_1)$ nello spazio S occupato dal corpo, costruiamo il gruppo dei $2m$ punti (a_i, b_i, c_i) che si ottengono con riflessioni sui piani del gruppo. E analogamente presa ad arbitrio una direzione l_1, m_1, n_1 costruiamo il gruppo analogo di direzioni l_i, m_i, n_i. Poniamo

$$r_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2}.$$

Le deformazioni ausiliarie che risolvono i due problemi alterni relativi allo spazio S, *sono le deformazioni che hanno rispettivamente per componenti del vettore-generatore*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{2m} l_i r_i \qquad \varphi' = \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i+1} l_i r_i$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{2m} m_i r_i \qquad \psi' = \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i+1} m_i r_i \tag{6}$$

$$\chi = \sum_{i=1}^{2m} n_i r_i \qquad \chi' = \sum_{i=1}^{2m} (-1)^{i+1} n_i r_i.$$

Ciascuna di queste due deformazioni serve a determinare, in funzione degli elementi noti al contorno, il valore della espressione

$$8\pi\, \Omega^2 \omega^2 (l_1 u + m_1 v + n_1 w) \tag{7}$$

[1] Per uniformità di notazione riterremo i puuti (x_1, y_1, z_1) (b_1, c_1, d_1) come gli stessi di (x, y, z) (a, b, c).

nel punto (a_1, b_1, c_1) cioè *la componente di spostamento secondo una direzione arbitraria, in un punto qualsiasi del corpo.*

Esse risolvono quindi completamente i due problemi di equilibrio considerati.

Le due deformazioni ausiliarie risultano così composte linearmente colle $2m$ deformazioni le cui componenti di spostamento sono

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
u_i &= (\omega^2 - \Omega^2)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial r_i}{\partial s_i} + 2\Omega^2 \frac{l_i}{r_i}\\
v_i &= (\omega^2 - \Omega^2)\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial r_i}{\partial s_i} + 2\Omega^2 \frac{m_i}{r_i}\\
w_i &= (\omega^2 - \Omega^2)\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial r_i}{\partial s_i} + 2\Omega^2 \frac{n_i}{r_i}
\end{aligned}
$$

dove s_i indica la direzione i cui coseni sono l_i, m_i, n_i, cioè si ha

$$\frac{\partial r_i}{\partial s_i} = l_i\frac{\partial r_i}{\partial x} + m_i\frac{\partial r_i}{\partial y} + n_i\frac{\partial r_i}{\partial z}.$$

Ciascuna di queste deformazioni, come è facile verificare, è simmetrica rispetto alla retta l_i, m_i, n_i, in quanto ogni superficie di rotazione che abbia questa retta per asse, conserva questa proprietà anche dopo la deformazione [1].

Le espressioni integrali definitive che rappresentano il valore della espressione (21) risulteranno analogamente composte con $2m$ termini della stessa forma e che differiranno unicamente pei valori dei parametri $a_i, b_i, c_i, l_i, m_i, n_i$.

5. Per fare un'applicazione delle formole precedenti consideriamo il caso del diedro di 60°. I tre piani di simmetria, che si hanno in questo caso, hanno un asse comune e si tagliano a due a due con un angolo di 120°.

Assumiamo questo asse come asse delle z, e come piano zx uno di questi piani, che considereremo anche come origine degli azimut θ in un sistema di coordinate cilindriche.

I tre piani di simmetria corrisponderanno ai valori $\theta = 0\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}$ e possiamo supporre, per fissare le idee, che il diedro occupato dal corpo sia quello contenuto fra i piani $\theta = 0\ ,\ \theta = \frac{\pi}{3}$.

Il gruppo dei punti (a_i, b_i, c_i) è rappresentato in questo caso, come è facile verificare, dalle formole seguenti

[1] Se infatti si riferisce la deformazione ad un sistema di coordinate polari avente la retta (l_i, m_i, n_i) come asse ed il punto (a_i, b_i, c_i) come polo, si trova per le tre componenti di spostamento U_r, U_θ, U_ω secondo il raggio, il meridiano ed il parallelo rispettivamente

$$U_r = 2\Omega^2\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\qquad U_\theta = -(\Omega^2+\omega^2)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\qquad U_\omega = 0.$$

$$a_6 = \quad a_1 \qquad a_3 = \quad a_4 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}b_1 \qquad a_5 = \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1$$

$$b_6 = -b_1 \qquad b_3 = -b_4 = \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1 \qquad b_5 = -b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 .$$

Più semplicemente in cordinate cilindriche, osservando che i sei punti del gruppo non differiscono che per l'azimut, si ha

$$\theta_{2i} = \frac{2\pi i}{3} - \theta_1 \qquad \theta_{2i-1} = \frac{2(i-1)\pi}{3} + \theta_1 \qquad\qquad i = 1\,,2\,,3$$

per individuarne la posizione nello spazio.

Indicando con $\varrho\,,\varrho_1$ le distanze dei punti $(x\,,y\,,z)$ $(a_1\,,b_1\,,c_1)$ dall'asse, abbiamo anche in coordinate cilindriche

$$r_i = \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\,\varrho_1 \cos(\theta - \theta_i) + \varrho_1^2 + (z - c_1)^2} .$$

Prendiamo ora come direzione $(l_1\,,m_1\,,n_1)$ quella dell'asse delle x; la deformazione ausiliaria corrispondente sarà quella che serve a determinare la componente di spostamento secondo questo asse. Pel gruppo di direzioni corrispondente troviamo

$$l_6 = \ l_1 = 1 \qquad l_2 = \ l_3 = -\frac{1}{2} \qquad l_4 = \ l_5 = -\frac{1}{2}$$

$$m_6 = m_1 = 0 \qquad m_2 = m_3 = \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad m_4 = m_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 0 .$$

Quindi per le funzioni $\varphi\,,\psi\,,\chi$, secondo le (6), che indicheremo in questo caso con $\varphi_x\,,\psi_x\,,\chi_x$, si ha

$$\varphi_x = r_1 - \frac{1}{2}(r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + r_6$$

$$\psi_x = \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(r_2 + r_3 - r_4 - r_5)$$

$$\chi_x = 0$$

Analogamente per il vettore $\varphi_y\,,\psi_y\,,\chi_y$ che dà la deformazione ausiliaria che serve a determinare la componente secondo l'asse y, si trova

$$\varphi_y = \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(r_2 - r_3 - r_4 + r_5)$$

$$\psi_y = r_1 + \frac{1}{2}(r_2 - r_3 + r_4 - r_5) - r_6$$

$$\chi_y = 0 .$$

E finalmente per il vettore $\varphi_z, \psi_z, \chi_z$ si ha

$$\varphi_z = \psi_z = 0$$
$$\chi_z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 .$$

Le espressioni analoghe per le φ', ψ', χ' corrispondenti al secondo problema si avrebbero da queste mutando segno alle r_i di indice i pari.

Nel caso del diedro e del triedro retto le formole (6) si riducono semplicissime. Nel caso del diedro ad es. indicando con l, m, n i coseni di una direzione arbitraria il gruppo corrispondente è

$$(l, m, n) \; ; \; (-l, m, n) \; ; \; (-l, -m, n) \; ; \; (l, -m, n)$$

e quindi per il vettore-generatore della deformazione che determina la componente di spostamento secondo la direzione (l, m, n) nel primo problema si ha

$$\varphi = l(r_1 - r_2 - r_3 + r_4)$$
$$\psi = m(r_1 + r_2 - r_3 - r_4)$$
$$\chi = n(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$$

e nel secondo problema

$$\varphi' = l(r_1 + r_2 - r_3 - r_4)$$
$$\psi' = m(r_1 - r_2 - r_3 + r_4)$$
$$\chi' = n(r_1 - r_2 + r_3 - r_4).$$

6. Queste formole sono sucettibili di una generalizzazione interessante al caso del parallepipedo rettangolo. Il passaggio dai gruppi finiti che abbiamo finora considerato a quelli infiniti, che si presentano quando si considera la divisione dello spazio in un numero infinito di parallelepipedi rettangoli mediante tre serie di piani equidistanti (tenendo presente l'enunciato del teorema fondamentale dato in principio della Nota precedente), è così immediato che noi non ci fermeremo a discuterne. Soltanto vi è in questo caso da considerare la quistione della convergenza delle serie, poichè non si ha più a che fare con un numero finito di immagini. Ora anche la convergenza delle serie si può dimostrare in modo facilissimo. Ed è di essa unicamente che ci occuperemo.

Indicheremo con A, B, C gli spigoli del parallelepipedo; e prendiamone, come origine delle coordinate, il centro. Le sei faccie avranno per equazione

$$x = \pm \frac{A}{2} \qquad y = \pm \frac{B}{2} \qquad z = \pm \frac{C}{2}$$

e la triplice infinità delle immagini di un punto di coordinate a, b, c contenuto nel parallelepipedo dato, è determinata dalle formole

$$(9) \qquad \begin{aligned} a_{\lambda,\mu,\nu} &= \lambda A + (-1)^\lambda a \\ b_{\lambda,\mu,\nu} &= \mu B + (-1)^\mu b \\ c_{\lambda,\mu,\nu} &= \nu C + (-1)^\nu c \end{aligned}$$

dove per λ, μ, ν si devono prendere tutti i numeri positivi e negativi compreso lo zero. Quindi si dovranno considerare le distanze

$$r_{\lambda,\mu,\nu} = \sqrt{(x - \lambda A - (-1)^\lambda a)^2 + (y - \mu B - (-1)^\mu b)^2 + (z - \nu C - (-1)^\nu c)^2}.$$

Analogamente per il gruppo delle direzioni (l_i, m_i, n_i) simmetriche rispetto alle tre serie di piani si trova subito

$$l_{\lambda,\mu,\nu} = (-1)^\lambda l \qquad m_{\lambda,\mu,\nu} = (-1)^\mu m \qquad n_{\lambda,\mu,\nu} = (-1)^\nu n$$

(in queste formole si ritiene $a_{0,0,0} = a, \dots l_{0,0,0} = l, \dots$).

Ora consideriamo nelle espressioni (8) i termini u'_i, v'_i, w'_i che hanno per coefficiente l_i. Sviluppando le derivate si trova

$$u'_i = (\Omega^2 - \omega^2)\frac{(x - a_i)^2}{r_i^3} + (\Omega^2 + \omega^2)\frac{1}{r_i}$$

$$v'_i = (\Omega^2 - \omega^2)\frac{(x - a_i)(y - b_i)}{r_i^3}$$

$$w'_i = (\Omega^2 - \omega^2)\frac{(x - a_i)(z - c_i)}{r_i^3}.$$

Ora essendo

$$\left|\frac{x - a_i}{r_i}\right| \leq 1 \qquad \left|\frac{y - b_i}{r_i}\right| \leq 1 \qquad \left|\frac{z - c_i}{r_i}\right| \leq 1$$

la convergenza delle serie

$$\Sigma\, l_i u'_i \qquad \Sigma\, l_i v'_i \qquad \Sigma\, l_i w'_i$$

estesa ad un gruppo infinito di punti (a_i, b_i, c_i) comunque determinati, risulterà dimostrata quando sia dimostrata la convergenza della serie

$$\Sigma \frac{1}{r_i}$$

estesa allo stesso gruppo di punti.

Considerazioni simili si possono fare per le serie che si ottengono dai termini che nelle (8) dipendono da m_i ed n_i.

La quistione della convergenza delle serie del parallelepipedo nei problemi che stiamo trattando, si riduce così alla convergenza della serie

$$\Psi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\lambda \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu \frac{1}{r_{\lambda,\mu,\nu}}. \tag{10}$$

Questa funzione Ψ non è altro che la funzione analoga a quella di Green che serve a risolvere il problema di Dirichlet per il parallelepipedo, quando alla superficie invece dei valori della funzione sono dati quelli della derivata normale. Per la funzione di Green si ha invece

$$\Phi = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu} \frac{(-1)^{\lambda+\mu+\nu}}{r_{\lambda,\mu,\nu}} . \tag{11}$$

Ora a proposito di questa serie Riemann ha osservato [1] che può essere espressa con un integrale definito mediante le funzioni theta jacobiane. Anche per la serie Ψ vale una proprietà analoga. Noi stabiliremo le effettive espressioni di Φ e Ψ mediante le funzioni theta; ne risulterà così implicitamente dimostrata la convergenza della serie (10).

Mediante la nota formola

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-r^2 t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{r}$$

prendendo per r l'espressione $r_{\lambda,\mu,\nu}$ precedentemente stabilita, si trovano per le serie (10) (11) le espressioni

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda,\mu,\nu} (-1)^{\lambda+\mu+\nu} \int_0^\infty e^{-tr^2_{\lambda,\mu,\nu}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda,\mu,\nu} \int_0^\infty e^{-tr^2_{\lambda,\mu,\nu}} \frac{dt}{\sqrt{t}} .$$

Se ora si pone

$$\begin{aligned} \Omega_1(x,t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} (-1)^{\lambda} e^{-t\{x-\lambda A-(-1)^{\lambda}a\}^2} \\ \Omega_1^\star(x,t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\lambda} e^{-t\{x-\lambda A-(-1)^{\lambda}a\}^2} \end{aligned} \tag{12}$$

e si indicano con Ω_2, Ω_3, $\Omega_2^\star$, $\Omega_3^\star$ le funzioni che si ottengono dalle due precedenti cambiando A, a in B, b e C, c rispettivamente, si trova per le serie precedenti

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Omega_1(x,t)\, \Omega_2(y,t)\, \Omega_3(z,t) \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Omega_1^\star(x,t)\, \Omega_2^\star(y,t)\, \Omega_3^\star(z,t) \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Ora le serie (12) si possono esprimere colle funzioni theta nel seguente modo. Se si pone

$$\Theta_1(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} e^{-t(2nA+a-x)^2}$$

$$\Theta_2(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} e^{-t((2n+1)A-a-x)^2}$$

[1] Cfr. Riemann, *Schwere, Electricität und Magnetismus*, § 23.

si trova subito

$$\Omega_1(x, t) = \Theta_1(x, t) - \Theta_2(x, t)$$

$$\Omega_1^*(x, t) = \Theta_1(x, t) + \Theta_2(x, t),$$

Ora introducendo le due funzioni jacobiane (¹)

$$\vartheta_2(\xi, r) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{\frac{1}{4}\alpha(2n+1)^2 + i(2n+1)\xi}$$

$$\vartheta_3(\xi, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{\alpha n^2 + 2in\xi} \qquad q = e^{\alpha}$$

si trova

$$\Theta_1(x, t) = e^{-t(a-x)^2}\, \vartheta_3\left(\frac{2\mathrm{A}(a-x)}{i}, q_1\right)$$

$$\Theta_2(x, t) = e^{-t(a+x)^2}\, \vartheta_2(2\mathrm{A}(a+x)\, i, q_1)$$

ove

$$q_1 = e^{-4t\mathrm{A}^2}$$

e la forma immaginaria è solo apparente.

Ponendo le serie ϑ_3, ϑ_2 sotto la forma reale

$$\vartheta_3(\xi, q) = 1 + 2\sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\xi$$

$$\vartheta_2(\xi, q) = 2\sum_1^{\infty} q^{\frac{1}{4}n^2} \cos(2n+1)\xi$$

possiamo anche scrivere

$$\Theta_1(x, t) = e^{-t(a-x)^2}\, \vartheta_3(2\mathrm{A}(a-x), q_1)$$

$$\Theta_2(x, t) = e^{-t(a+x)^2}\, \vartheta_2(2\mathrm{A}(a+x), q_1)$$

ove non comparisce più l'immaginario.

Queste formole, e le analoghe che si possono stabilire per le serie Ω_2, Ω_3, Ω_2^*, Ω_3^*, risolvono la questione proposta.

7. I problemi dei quali ci siamo occupati non sono i soli che possano essere trattati col metodo delle immagini. Così i problemi nei quali si hanno condizioni miste alla superficie. cioè su alcune parti di questa le condizioni del 1° problema e sulle rimanenti quelle del 2°, rientrano qualche volta (come si è visto) nei metodi nostri. Ma inoltre il metodo delle immagini è sempre applicabile come metodo di approssimazioni successive per un corpo limitato da piani, quando si conosca la soluzione del problema nel caso di un piano solo. Questo procedimento riesce, per citare un esempio, nel caso di una lastra indefinita anche pei problemi 3° e 4° (²), ma porta a serie meno semplici di quelle che abbiamo trovato precedentemente. Pei problemi 1° e 2° relativi alla lastra, si vede subito che essi sono casi speciali di quello del parallelepipedo.

(¹) *Theorie der elliptischen Functionen aus der Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet.* Jacobi, Ges. Werke, B. I.

(²) V. Nuovo Cimento, 1886.

D'altra parte poi il metodo da noi applicato non è il solo che possa portare alla soluzione dei problemi considerati in questa Nota. In casi speciali e quando si tratta di mezzi isotropi, i metodi ordinari fondati sulle proprietà dell'equazione di Laplace possono essere anche preferibili. Dopo che fu nota la risolubilità dei problemi alterni, sono infatti apparsi diversi lavori, in cui questi problemi sono appunto studiati con esito felice, mediante tali metodi (*Marcolongo*, Rend. dei Lincei, 1902; *Morandi*, Annali di Mat., T. 9, 1904, *Orlando*, Nuovo Cimento, T. VII, 1904).

A noi sembra però che la base analitica più naturale della loro soluzione debba ricercarsi nelle proprietà dei gruppi di integrali, che abbiamo considerato come una estensione del metodo delle immagini di Lord Kelvin. Queste proprietà infatti conducono spontaneamente a questi problemi, che, sebbene siano quelli la cui soluzione è più semplice e più facilmente determinabile, pure erano sfuggiti finora agli studiosi. Inoltre il metodo fondato su di esse è generale ed uniforme ed applicabile anche ai corpi cristallini, il che si può quasi escludere *a priori* pei metodi fondati sulle proprietà della equazione di Laplace.

Chiuderemo queste considerazioni accennando ad un problema tecnico che ha una notevole relazione con l'ultimo dei problemi alterni studiati in questa Nota, e che ci fu indicato dall'amico prof. M. Cantone.

Nello studio della resistenza dei materiali da costruzione alla rottura per compressione fu osservato che tale resistenza varia enormemente inserendo sottili strati di materie diverse fra i prismi della macchina di pressione ed i parallelepipedi del materiale da sperimentare. In particolare questa resistenza può ridursi perfino a metà, usando fogli di piombo in confronto a fogli di cartone o di altra materia non deformabile per compressione.

Il fatto fu spiegato osservando che il piombo sotto l'azione della pressione si schiaccia e tende a sfuggire lateralmente esercitando per attrito sulla superficie del materiale, con cui si trova a contatto, un'azione di strappamento trasversale. È questa azione che modifica fondamentalmente la deformazione elastica [1].

Le due faccie direttamente compresse del parallelepipedo si trovano quindi soggette ad un'azione premente normale nota e ad uno stiramento tangenziale, pel quale si può avere qualche criterio di misura dalla deformazione subita dalla lamina di piombo. Sono questi precisamente i dati alla superficie nel 2° problema alterno. Lo studio della deformazione potrebbe quindi basarsi su metodi analoghi a quello sviluppato per il parallelepipedo.

Non insisteremo su questo problema, bastandoci l'osservazione che anche i problemi alterni possono avere un significato nella tecnica.

[1] Cfr. Guidi, *Annali della Società italiana degli Ingegneri ed Architetti Italiani*, 1895, fasc. IV. — Salemi-Pace, *Esperienze sui materiali da costruzione eseguite nell'Istituto della R. Scuola d'applicazione per gli Ingegneri ed Architetti in Palermo*, Palermo, 1898.