ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

da sottrarre i centri nervosi all'azione di esso. Non ci resta quindi altra spiegazione se non di ammettere che le cellule nervose, tanto del sensorio, quanto dei centri della circolazione e della respirazione, divengano a grandi altezze meno sensibili all'alcool, in modo che la loro funzione, allorchè passano nel sangue quantità di questa sostanza che normalmente son sufficienti a produrre una spiccatissima azione.

Fisica matematica. — *Sopra i conduttori cavi.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Sia C un conduttore che occupi lo spazio S (fig. I). Supponiamo che si possa sulla superficie σ del conduttore tracciare una linea chiusa l (di cui in figura si vedono le traccie nei punti A, B), e nello spazio esterno ad S costruire una superficie ω limitata dalla linea l, in modo che ω resulti molto piccola rispetto all'una e all'altra delle due parti in cui la linea l divide la superficie σ.

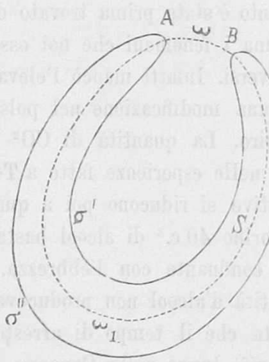

Fig. 1.

Noi diremo allora che C è un conduttore *cavo*.

Denotando con σ' e σ'' le due parti in cui la superficie σ è divisa dalla linea l, e precisamente con σ' quella che si trova nell'interno della superficie chiusa formata da σ'' ed ω, potremo chiamare σ' la superficie *interna*, σ'' la superficie *esterna* del conduttore.

Il conduttore C contenga una massa elettrica E in equilibrio, non soggetta all'azione di masse esterne. Per semplicità supporremo uguale ad 1 il potenziale del conduttore.

Indichiamo con e quella porzione della massa E che si trova sopra σ'.

Se la superficie del conduttore si trasformasse in modo che, pure restando σ' finita, ω si riducesse ad un punto, avremmo, al limite, $e=0$. Quando ω sia piccolissima rispetto a σ', e sarà piccolissima rispetto ad E; e noi ci possiamo proporre di determinare dei limiti tra i quali e debba esser compresa. A questa ricerca è dedicata, in parte, una pregevole Memoria del Robin (1). Ma si possono ottenere delle formule più generali di quelle a cui esso perviene, e dedurre da tali formule alcuni teoremi relativi al valore di e, che dalle formule del Robin non potrebbero dedursi: ciò che appunto farò vedere in questa Nota.

2. Diciamo U il potenziale della massa E in equilibrio sulla superficie del conduttore; h denoti la densità in un punto qualunque di σ: noi supporremo h ovunque finita e continua. Sieno poi m_1, m_2, ecc. delle masse situate in punti qualsiansi dello spazio, V il loro potenziale, U_i il valore di U nel punto occupato dalla massa m_i.

Applicando una nota formula di reciprocità fra le masse e i potenziali, avremo:

$$\int_\sigma V h d\sigma = \Sigma U_i m_i .$$

Se tutte le masse m_i si trovano nello spazio S occupato dal conduttore, ove per ipotesi è $U=1$, sarà, detta M la loro somma:

$$\int_\sigma V h d\sigma = M \tag{1}$$

Più in generale questa formula vale per qualunque funzione V che sia armonica e regolare nello spazio esterno ad S, e si comporti all'infinito come una funzione potenziale, anche se essa presenta delle discontinuità sulla superficie σ. In tal caso V non si può considerare come il potenziale di una massa ordinaria: ma la formula (1) sussiste, ove s'intenda la quantità M definita dalla formula

$$M = \lim_{\rho=\infty} (\rho V),$$

ρ denotando la distanza contata da un punto fisso dello spazio. Per sempli-

(1) G. Robin, *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts* (Annales de l'École normale supérieure, 3e série, t. III, Supplément; 1886). — V. anche: Oeuvres scientifiques de G. Robin, réunies et publiées par L. Baffy, pag. 73.

cità diremo sempre che V è il potenziale della *massa* M situata nel conduttore.

Se $M = 0$, avremo

$$\int_\sigma V h d\sigma = 0. \tag{2}$$

In particolare questa formula varrà quando V rappresenti il potenziale di un *doppio strato* disteso sopra una superficie ω_1 situata nello spazio S: giacchè in tal caso si ha appunto $M = \lim_{\rho=\infty} (\rho V) = 0$.

Come caso ancora più particolare essa varrà quando il *momento* del doppio strato sia ovunque uguale ad 1, vale a dire quando V rappresenti l'*angolo solido* secondo cui è veduta dai punti di σ una delle due faccie della superficie ω_1: la qual superficie potrà anche ridursi a coincidere con σ.

3. Sia la superficie ω_1 limitata dalla stessa linea l da cui è limitata la superficie ω (fig. I), in modo da formare con ω una superficie chiusa Ω; V denoti l'angolo secondo cui è veduta la faccia *interna* di ω_1, ossia quella rivolta verso l'interno di Ω.

Applichiamo la formula (2), osservando che la superficie ω è costituita dalle due parti σ' e σ''; avremo:

$$\int_{\sigma'} V h d\sigma' + \int_{\sigma''} V h d\sigma'' = 0.$$

Diciamo θ l'angolo secondo cui è veduta da un punto qualunque di σ la faccia *interna* di ω. Nei punti di σ' sarà $V + \theta = 4\pi$, quindi $V = 4\pi - \theta$; nei punti di σ'', $V + \theta = 0$, quindi $V = -\theta$. Onde la formula precedente potrà scriversi:

$$\int_{\sigma'} (4\pi - \theta) h d\sigma' - \int_{\sigma''} \theta h d\sigma'' = 0,$$

od anche:

$$4\pi \int_{\sigma'} h d\sigma' = \int_{\sigma'} \theta h d\sigma' + \int_{\sigma''} \theta h d\sigma'' = \int_\sigma \theta h d\sigma.$$

Ma $\int_{\sigma'} h d\sigma' = e$; dunque:

$$e = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \theta h d\sigma. \tag{3}$$

Il Robin, stabilita questa formula, ne deduce due limiti tra i quali deve esser compresa la massa e. Sieno θ_1 e θ_2 il minimo ed il massimo valore di θ nei punti di σ. Per una nota proprietà sulla distribuzione di equilibrio, avendo supposto nel conduttore $U = 1$, sarà ovunque $h > 0$; quindi:

$$\frac{\theta_1}{4\pi}\int_\sigma hd\sigma \leqq e \leqq \frac{\theta_2}{4\pi}\int_\sigma hd\sigma$$

ossia

$$\frac{\theta_1}{4\pi} \leqq \frac{e}{E} \leqq \frac{\theta_2}{4\pi} \tag{4}$$

le quali relazioni sussisteranno qualunque sia il potenziale del conduttore, dovendo e esser proporzionale ad E.

Ma dalla formula (3) si possono, in infiniti altri modi, ottenere due limiti per la massa e.

Denotiamo infatti con M_0 *una massa situata nel conduttore, il cui potenziale* V_0 *nei punti di* σ *sia uguale a* θ. Sarà per la formula (1):

$$\int_\sigma \theta hd\sigma = M_0\,, \tag{5}$$

quindi:

$$e = \frac{M_0}{4\pi}. \tag{6}$$

Otteniamo così la massa e espressa mediante questa nuova massa M_0, il cui potenziale V_0 assume nei punti di σ valori noti.

Sieno ora V_1 e V_2 i potenziali di due masse M_1, M_2, comunque distribuite nel conduttore, ma in modo che in tutti i punti di σ sia:

$$V_1 \leqq \theta\,,\ V_2 \geqq \theta. \tag{7}$$

Avremo al solito:

$$\int_\sigma V_1 hd\sigma = M_1\,,\ \int_\sigma V_2 hd\sigma = M_2\,;$$

quindi, per le formule (5) e (7):

$$M_1 \leqq M_0 \leqq M_2\,,$$

e per la (6):

$$\frac{M_1}{4\pi} \leqq e \leqq \frac{M_2}{4\pi}. \tag{8}$$

In particolare, assumendo nei punti di σ $V_1 = \text{cost.} = \theta_1$, $V_2 = \text{cost.} = \theta_2$ sarà $M_1 = \theta_1 E$, $M_2 = \theta_2 E$: e ritroveremo così le formule (4).

4. Nella formula

$$e \leqq \frac{M_2}{4\pi},$$

M_2 rappresenta una massa che può essere comunque distribuita *nel condut-*

tore, purchè il suo potenziale V_2 sia uguale a θ, o maggiore, in tutti i punti di σ. Ora noi possiamo dare ad M_2 un significato ancora più ampio.

Sia V_2 il potenziale di una massa M' comunque distribuita nello spazio S, e di altre masse m_1, m_2, ecc. situate in punti esterni. Applicando la solita formula di reciprocità ai potenziali U, V_2, e alle rispettive masse, avremo:

$$\int_\sigma V_2 h d\sigma = M' + \Sigma U_i m_i .$$

Supponiamo che le masse esterne m_1, m_2 ecc. siano tutte positive (o nulle). Poichè nei punti esterni a σ U è minore di 1, sarà $\Sigma U_i m_i \leq \Sigma m_i$ onde, chiamando M_2 la massa totale $M' + \Sigma m_i$:

$$\int_\sigma V_2 h d\sigma \leq M_2 . \tag{9}$$

Se nei punti di σ il potenziale V_2 è uguale a θ, o maggiore, sarà

$$\int_\sigma \theta h d\sigma \leq \int_\sigma V_2 h d\sigma ,$$

quindi per le formule (3) e (9):

$$e \leq \frac{M_2}{4\pi} ,$$

ove M_2 rappresenta dunque una massa che può trovarsi in parte, o totalmente, fuori di σ, *purchè quella parte di* M_2 *che è esterna a* σ *sia tutta positiva:* nei punti di σ il suo potenziale V_2 deve essere uguale a θ, o maggiore.

Notiamo che il segno $=$ si riferisce al solo caso che tutta quanta la massa M_2 si trovi nello spazio S, e che in tutti i punti di σ sia $V_2 = \theta$. Quando tali condizioni non sono soddisfatte, sarà certamente:

$$e < \frac{M_2}{4\pi} . \tag{10}$$

Considerazioni analoghe si potrebbero fare sulla formula $e \geq \frac{M_1}{4\pi}$: ma noi ci limitiamo a considerare la formula (10) che fornisce un limite superiore della massa e.

5. Per fare un esempio, esaminiamo il caso particolare che la linea l sia piana. Come superficie ω assumiamo la superficie piana limitata da l, che supporremo non incontri, fuori di l, la superficie del conduttore.

Diciamo (fig. II) O il centro, a il raggio del minimo cerchio giacente nel piano di l, e che racchiude questa linea, s la sfera di centro O e di raggio a, ϱ la distanza di un punto qualunque dello spazio da O.

La superficie ω essendo piana sarà veduta da un punto qualunque dello spazio sotto un angolo $\theta < 2\pi$: per conseguenza nell'interno della sfera s, ove $\varrho < \alpha$, sarà:

$$\theta < \frac{2\pi a}{\varrho}$$

Sia ora A un punto situato fuori della sfera (od anche sulla sua superficie). Consideriamo il cono tangente alla sfera col vertice in A, e diciamo α

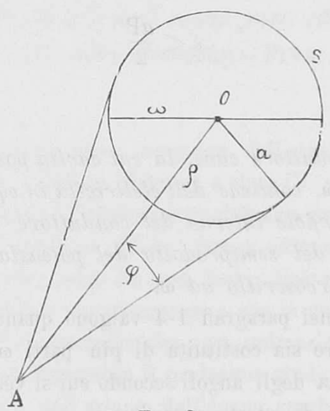

Fig. 2.

l'angolo solido al vertice del cono. Dal punto A l'area ω sarà veduta sotto un angolo $\theta < \alpha$.

L'angolo solido α può esprimersi in funzione dell'angolo φ compreso tra la retta OA e una generatrice del cono. Si trova: $\alpha = 2\pi(1 - \cos\varphi)$. Dunque in tutti i punti come A:

$$\Theta < 2\pi(1 - \cos\varphi),$$

e a maggior ragione, essendo $\cos\varphi \geqq 0$:

$$\theta < 2\pi(1 - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi).$$

Ma $(1 - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi) = 1 - \cos^2\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \leqq \frac{a}{\varrho}$ (poichè nel punto A $\varrho \geqq a$). Per conseguenza, anche nei punti esterni, o situati sulla superficie della sfera:

$$\theta < \frac{2\pi a}{\varrho}$$

Se dunque poniamo $M_2 = 2\pi a$, $V_2 = \frac{M_2}{\varrho}$, sarà in un punto qualunque dello spazio, e in particolare sulla superficie del conduttore,

$$\theta < V_2.$$

Ma V_2, ossia $\frac{M_2}{\varrho}$, è il potenziale della massa *positiva* $M_2 = 2\pi a$ situata nel punto O. Avremo quindi per la formula (10), $e < \frac{2\pi a}{4\pi}$, ossia $e < \frac{a}{2}$.

Se il potenziale del conduttore invece d'esser uguale ad 1 è uguale a P, sarà, in valore assoluto:

$$e < \frac{a\mathrm{P}}{2}$$

Onde il teorema:

Quando un conduttore cavo, la cui cavità possa chiudersi mediante una superficie piana ω, contiene dell'elettricità in equilibrio, e P *è il suo potenziale, sulla superficie interna del conduttore si trova una quantità di elettricità minore del semiprodotto del potenziale* P *per il raggio a del minimo cerchio circoscritto ad ω.*

6. Le cose dette nei paragrafi 1-4 valgono quand'anche la superficie ω che chiude il conduttore sia costituita di più parti ω_1, ω_2, ecc.: θ rappresenterà allora la somma degli angoli secondo cui si vedono da un punto dello spazio le faccie interne di queste superficie.

Nel caso che esse siano tutte piane sarà in un punto qualunque A dello spazio:

$$\theta < \frac{2\pi a_1}{\varrho_1} + \frac{2\pi a_2}{\varrho_2} + \cdots$$

$a_1, a_2, \ldots$ denotando i raggi dei minimi cerchi circoscritti ad $\omega_1, \omega_2, \ldots$ e $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ le distanze dei loro centri dal punto A. Ma il secondo membro di questa formula è il potenziale delle masse positive $2\pi a_1, 2\pi a_2, \ldots$ situate nei centri dei cerchi. Avremo dunque:

$$e < \frac{2\pi a_1 + 2\pi a_2 + \cdots}{4\pi},$$

o più semplicemente:

$$e < \frac{\Sigma a}{2}$$

e se P è il potenziale del conduttore:

$$e < \frac{\Sigma a}{2} \, P$$

Per esempio: *in un conduttore formato da un cilindro cavo, a sezione circolare, aperto alle basi, la quantità di elettricità che si trova sulla superficie interna è sempre minore di* aP, *a denotando il raggio di questa superficie, e* P *il potenziale del conduttore.*

Fisica. — *Influenza della pressione del soffio nella elettrizzazione per gorgoglio d'aria nell'acqua pura ed in alcune soluzioni acide e saline.* Nota del dott. UMBERTO PIVA, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Lo studio dell'elettrizzazione reciproca dell'aria e dell'acqua data da lungo tempo. Nel 1890 i signori Maclean e Goto ([1]), pubblicarono i risultati dei loro esperimenti circa la elettrizzazione dell'aria prodotta da un getto di acqua battente sopra superficie solide. Senza entrare nella descrizione del metodo e degli apparecchi usati da quei fisici, dirò soltanto che essi trovarono che l'aria si elettrizza negativamente e che la sua elettrizzazione diminuisce col diminuire del pulviscolo che essa ordinariamente contiene.

Anche il Lenard ([2]) intraprese il medesimo studio dal quale risultò: che l'elettrizzazione reciproca dell'aria e dell'acqua cambia di segno con l'aumentare della violenza del getto d'acqua; che questa assume generalmente il segno positivo, mentre l'aria assume quello negativo; che il fenomeno acquista proporzioni maggiori in corrispondenza alla maggiore purezza dell'acqua; che non tutti i gas si comportano come l'aria e che le soluzioni saline, cadenti attraverso l'aria, fanno cambiar di segno al fenomeno.

Gli esperimenti e le conclusioni a cui giunse il Lenard indussero J. J. Thomson ([3]) ad una serie di esperimenti consimili quasi per trovare confermata la sua ipotesi di un doppio strato di elettricità sui corpi, ipotesi ch'egli aveva emessa osservando il comportamento di una scarica elettrica entro i tubi a gas rarefatto. Si pose quindi a studiare quale influenza avessero nella produzione del fenomeno sia la purezza dell'acqua, sia la natura delle soluzioni acide o saline contenute nell'acqua e del gas avviluppante le goccioline liquide non che la temperatura. Egli osservò che l'acqua pura si

([1]) Phil. Magazine, 1890, 30, 148.
([2]) Wied. Annalen, 1892, 46, 584.
([3]) Phil. Magazine, 1894, 37, 340, 358.