ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

La mancanza di centrosomi e di astri si verifica anche in altri Protozoi.

Riassumendo: il fatto principale da noi constatato è il seguente. Tangenzialmente al nucleo, si forma un fuso che ingrandisce moltissimo; dapprima tiene insieme come una funicella i due individui che si vanno formando, dopo la divisione, diventa un pezzo scheletrico assile. Esso può ritenersi sviluppato specialmente per ragione dell'ambiente in cui vivono i suddetti Protozoi e sembra paragonabile al filo assile degli spermî.

Crediamo che il caso offerto dai nostri Flagellati sia veramente degno di molta considerazione e debba avere una parte non piccola nelle discussioni citologiche.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie.* Nota di Francesco Severi, presentata dal Socio C. Segre.

1. Sia

$$F(x\,y\,z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di una superficie algebrica irriducibile d'ordine m, a sezioni piane di genere p, dotata di singolarità ordinarie [1], ed

$$A dx + B dy \tag{2}$$

un differenziale totale esatto, appartenente al campo di razionalità definito dalla (1); vale a dire siano A, B due funzioni razionali di x, y, z, tali che la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

risulti soddisfatta allorquando z si riguardi come funzione algebrica di x, y, definita mediante la (1).

Dicesi che in un punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ di F l'*integrale di Picard*

$$J = \int A dx + B dy, \tag{3}$$

presenta una *singolarità polare* o un *polo*, quando scegliendo una curva qualunque di F, uscente da $(x_0\, y_0\, z_0)$ e rappresentabile, nell'intorno di questo punto, colle formole

$$x = x_0 + x(t)\ ,\ y = y_0 + y(t)\ ,\ z = z_0 + z(t), \tag{4}$$

[1] Cioè una linea doppia, con un numero finito di punti tripli. Quest'ipotesi, com'è noto, non è restrittiva nello studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali.

ove $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono funzioni analitiche olomorfe nell' intorno di $t = 0$, e che si annullano in $t = 0$, l' integrale

$$\int f(t)\,dt,$$

che si ottiene come trasformato dell' integrale (3), mediante le formole (4), presenta in $t = 0$ una singolarità polare (¹).

L' integrale (3) dicesi *di seconda specie* quando su tutta la superficie F presenta al più singolarità polari. In particolare se esso conservasi finito in ogni punto di F, dicesi *di prima specie.*

Tra gl' integrali di seconda specie vanno noverate le funzioni razionali; anzi i soli integrali di seconda specie appartenenti ad una superficie dello spazio ordinario, priva di punti multipli, sono le sue funzioni razionali, e gl' integrali di prima specie riduconsi a costanti (²).

La questione fondamentale che si affaccia intorno agli integrali di Picard della seconda specie, dalla quale dipende la soluzione di molti importanti problemi nella teoria delle superficie algebriche, è di assegnare le condizioni geometriche (traducibili in condizioni algebriche) necessarie e sufficienti affinchè la superficie F possegga integrali *trascendenti* di seconda specie (in particolare di prima).

A tale questione risponde parzialmente, assegnando una condizione necessaria, il teorema seguente:

Una superficie algebrica che possegga integrali di Picard trascendenti, della seconda specie (*in particolare di prima*), *è irregolare.*

Nella presente Nota mi propongo di esporre il concetto che mi ha guidato nella dimostrazione di questo teorema, riservandomi di pubblicarne i particolari in un altro lavoro più ampio (³).

Ma prima di tutto, per rendere intelligibile l'enunciato del teorema anche a quei lettori che non hanno famigliare la moderna teoria delle superficie algebriche ed il relativo linguaggio, dirò brevemente cosa s' intende per *superficie regolare* ed *irregolare.*

Considerando tutte le superficie di ordine $m - 3$ *aggiunte* alla (1) (cioè passanti per la sua linea doppia), due casi possono presentarsi: o esse segano sopra un piano qualunque, non tangente ad F, tutte quante le curve d'ordine $m - 3$ aggiunte alla sezione di F con quel piano, oppure ne segano

(¹) Cfr. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, pag. 145 (Paris, Gauthier-Villars, 1897).

(²) Ibidem, pp. 91 e 119.

(³) Le superficie con integrali di Picard risulterebbero caratterizzate in modo completo, ove si stabilisse la reciproca del teorema enunciato; ed io non mancherò di tentarne la dimostrazione.

soltanto una parte. Nel primo caso la F dicesi *regolare*, nel secondo *irregolare* (¹).

Così p. e. sono regolari le superficie razionali, le superficie dello spazio ordinario prive di punti multipli, ecc., ecc.; mentre sono irregolari le rigate irrazionali, le superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere > 0, ecc., ecc.

Ciò premesso, passo ad esporre nelle sue linee fondamentali, la dimostrazione del teorema enunciato.

Un integrale (3) di seconda specie, appartenente ad F, riguardato come funzione del punto scorrente sopra una curva algebrica irriducibile D della superficie, dà luogo ivi ad un integrale abeliano di seconda specie. Se la D è variabile in un fascio, l'integrale J stacca su essa razionalmente (rispetto al parametro che individua la posizione della curva entro al fascio) un gruppo di un *numero finito* di poli, i quali, al variare della D, descrivono una o più curve algebriche irriducibili, che si dicono le *curve polari* dell'integrale J (²).

In relazione a queste curve polari io considero gli *ordini d'infinito* e le *funzioni razionali residue* (dei varî ranghi), le quali hanno un ufficio analogo a quello dei coefficienti delle potenze negative dell'argomento, negli sviluppi di Laurent, che caratterizzano un integrale abeliano di seconda specie, intorno ai suoi poli.

Supposto che gli assi di riferimento abbiano posizione generica rispetto ad F, e supposto inoltre che tra le sezioni di F coi piani $y = \text{cost.}$ non si trovi nessuna curva polare di J (il che può sempre ottenersi, operando, nel caso, una conveniente trasformazione omografica), si dirà che lungo la curva irriducibile C *l'integrale* J *diviene infinito d'ordine* s, allorquando l'integrale abeliano $J(x\,\overline{y}\,z)$ relativo alla sezione di F col piano generico $y = \overline{y}$, ha per poli d'ordine s i punti d'intersezione di questo piano con C.

Nell'intorno di ciascun polo $(x_0\,\overline{y}\,z_0)$ l'integrale $J(x\,\overline{y}\,z)$ riguardato come funzione di x, dà luogo ad uno sviluppo ben determinato, che comincerà con un termine in $\dfrac{1}{(x - x_0)^s}$. Al variare del punto $(x_0\,\overline{y}\,z_0)$ lungo la curva C, il coefficiente di $\dfrac{1}{(x - x_0)^h}$ $(h = s, s - 1, \dots, 1)$ risulta funzione algebrica uniforme, cioè funzione razionale del punto stesso. È questa funzione ch'io chiamo la *funzione razionale residua di rango* h, individuata da J sopra la curva polare C.

(¹) La definizione ordinaria equivale a quella che noi abbiamo qui preferito, come più espressiva e più breve (Ved. Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*. Annali di Matematica (2) t. 25, 1897; n. 28).

(²) Picard et Simart, pag. 147.

Nel mio ragionamento occorre in modo speciale la considerazione della funzione residua di rango s, della quale trovo il gruppo dei poli ed il gruppo degli zeri. Profittando di questo risultato (che trovasi enunciato in modo esplicito più sotto, nel caso particolare $s = 1$), e della costruzione degli integrali di seconda specie appartenenti ad una superficie, dovuta al sig. Picard (1), riesco a stabilire che *tutti gl'integrali di Picard della seconda specie, appartenenti ad una superficie* F, *si possono ridurre, per sottrazione di funzioni razionali, ad integrali che divengano infiniti del primo ordine soltanto lungo una conveniente curva irriducibile* E, *priva di punti multipli, e appartenente ad un sistema lineare infinito.*

Non mi trattengo sulla dimostrazione di questo lemma, perchè anche in essa giuoca in modo essenziale il concetto che inspira la dimostrazione del teorema fondamentale, di cui vado ora ad occuparmi, supponendo già effettuata la riduzione suddetta.

Il gruppo dei poli della funzione residua $\varphi(x\,y\,z)$, di rango 1, individuata sopra E da un integrale di seconda specie J, che divenga infinito del primo ordine soltanto lungo questa curva, è costituito dai punti di contatto delle tangenti di E parallele al piano $x\,z$, e dai punti all'infinito della curva stessa; ed il gruppo degli zeri è costituito dai punti di E in ciascuno dei quali il piano tangente ad F è parallelo all'asse z, e dai punti di E ove l'integrale abeliano $\mathrm{J}(x\,\overline{y}\,z)$ (con $\overline{y}$ parametro variabile) è regolare.

Questi ultimi punti costituiscono un gruppo G della serie caratteristica completa esistente sulla E, cioè della serie lineare completa che contiene i gruppi segati su E dalle curve del sistema completo $|\mathrm{E}|$. Diremo perciò che G è il *gruppo caratteristico individuato su* E *dall'integrale* J.

Mutando J nella totalità degli integrali che divengono infiniti del primo ordine soltanto lungo E, restano fissi tutti i poli della funzione residua φ, e degli zeri variano soltanto quelli che costituiscono il gruppo G. Ciò accade in particolare anche quando J si riduce ad una funzione razionale. In tal caso G non è altro che il gruppo base del fascio $\mathrm{J} = \mathrm{cost.}$

Ciò posto, se la superficie F possiede integrali trascendenti di seconda specie, si può sempre supporre che l'integrale J non si riduca alla prima specie per sottrazione di una funzione razionale.

Basterà ad es. scegliere J per modo che i suoi periodi distinti sieno tutti reali (o tutti immaginarî puri): ciò è sempre possibile, perchè i periodi di un integrale di seconda specie appartenente ad F, si possono assegnare ad arbitrio (2). Fatta questa scelta, non potrà darsi che J — R, ove R è una funzione razionale qualunque, riducasi ad un integrale di prima specie, perchè altrimenti sopra una sezione piana della superficie, J — R darebbe

(1) Picard et Simart, pag. 93 e segg.

(2) Ibidem, pag. 100 e segg.

luogo ad un integrale abeliano di prima specie, i cui $2p$ periodi, essendo determinati in funzione dei periodi distinti dell'integrale J mediante relazioni lineari omogenee *a coefficienti interi* (¹), risulterebbero tutti reali (o tutti immaginari puri): il che è notoriamente assurdo (²).

Proverò ora che *il gruppo caratteristico* G *individuato su* E *dall'integrale* J, *non appartiene alla serie segata su* E *dalle curve del sistema completo* $|E|$.

Invero nell'ipotesi contraria che il gruppo G sia segato dalla curva $\overline{E}$ di $|E|$, la funzione razionale $R(x\,y\,z)$ (determinata a meno d'un fattore costante), che ha per curva di livello zero la $\overline{E}$ e per curva d'infinito la E, individuerebbe sulla curva polare una funzione residua φ', avente gli stessi poli e gli stessi zeri di φ. Sarebbe dunque:

$$\varphi = \lambda\varphi'$$

con λ costante, e quindi l'integrale $J - \lambda R$, resterebbe finito in ogni punto di E; cioè sarebbe di prima specie su tutta la superficie, contro il supposto.

Ne deriva che la serie caratteristica del sistema completo $|E|$ non è completa, e quindi (³) che la superficie F è irregolare.

2. Giovandomi sempre del lemma enunciato al numero precedente; nonchè della considerazione delle funzioni residue, determino maggiormente il teorema fondamentale, nel modo che segue:

Data una superficie algebrica F *di generi, aritmetico e geometrico,* P_a, P_g, *l'irregolarità* $P_g - P_a$ *della superficie, è almeno uguale all'eccesso del numero degli integrali di seconda specie algebricamente distinti sul numero degli integrali di prima specie linearmente indipendenti* (⁴).

3. Terminerò questo riassunto osservando che il teorema fondamentale da me dimostrato, può anche enunciarsi come una proprietà di *Analysis situs*, relativa alla varietà reale chiusa, a quattro dimensioni, i cui punti rappresentano le soluzioni complesse dell'equazione d'una superficie regolare.

Basta a tal uopo ricordare che se una superficie algebrica F possiede integrali di Picard trascendenti, della seconda specie, sulla varietà riemanniana V, immagine reale di F, esistono dei *cicli lineari* (cammini chiusi)

(¹) Picard et Simart, pag. 100.

(²) Ved. ad es. Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1895), § 118.

(³) Castelnuovo, loc. cit. n. 27; ved. pure la mia Nota, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (Rendiconti dei Lincei, serie 5ª, vol. XII, 2° sem. fasc. 7°, 1903.

(⁴) Ricordo che più integrali di Picard della seconda (o della prima) specie diconsi *algebricamente distinti* (o *linearmente indipendenti*), quando una loro combinazione lineare a coefficienti costanti, non tutti nulli, non riducesi mai ad una funzione razionale (o ad una costante).

che non si possono ridurre a punti per deformazione continua; cioè l'ordine di connessione lineare della V (o della F) è maggior d'uno ([1]).

Si può dunque dire che:

Per una superficie regolare l'ordine di connessione lineare è uguale ad 1; oppure, in altri termini:

Ogni cammino chiuso reale tracciato sulla varietà riemanniana a quattro dimensioni, immagine di una superficie regolare, si può ridurre ad un punto per deformazione continua operata entro alla varietà stessa ([2]).

Questo teorema va confrontato col seguente, relativo alle curve razionali: « Sopra la superficie di Riemann, immagine d'una curva razionale, ogni « cammino chiuso può ridursi ad un punto per deformazione continua ».

Geometria. — *Sui gruppi di proiettività.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

In una Nota dello stesso titolo di questa, pubblicata testè nei Rendiconti dei Lincei ([3]), sono dimostrati o accennati alcuni teoremi generali sui gruppi di proiettività, includenti come caso assai particolare le teorie finora note. È scopo di questa seconda Nota preliminare il dare un nuovo punto di vista, sotto cui si può riguardare la nostra teoria, che serve a renderne lo svolgimento della massima semplicità e generalità.

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di proiettività unimodulari reali* $z_i' = \Sigma_k\, a_{ik}\, z_k$ *sia discontinuo* (*non contenga trasformazioni infinitesime*) *è che, scelto ad arbitrio un numero finito positivo* N, *o non esistano, o esista un numero finito di proiettività i cui coefficienti* a_{ik} *sono in valore assoluto minori di* N (*e ciò qualunque sia il numero* N *scelto*).

Infatti, se il gruppo non è discontinuo, esistono in esso infinite trasformazioni pochissimo differenti dall'identità, i cui coefficienti sono chiaramente minori p. es. di 2 in valore assoluto. Viceversa se esistono infinite proiettività del gruppo, a coefficienti minori di N in valore assoluto, esse avranno *almeno* una proiettività limite P, a coefficienti finiti, unimodulare. Si potranno perciò trovare due proiettività del gruppo, distinte, e differenti di quanto poco si vuole dalla P e perciò anche differenti di quanto poco si vuole l'una dall'altra. Il prodotto di una per l'inversa dell'altra sarà una

([1]) Picard et Simart, pag. 150.

([2]) In particolare si ha il teorema di Picard già citato (P. et S., pp. 91 e 119), relativo alle superficie prive di punti multipli; e l'estensione di questo teorema dovuta a Berry (Acta math., 27, 1903, pag. 157).

([3]) Fasc. 2°, 2° sem., 1904.