ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

che non si possono ridurre a punti per deformazione continua; cioè l'ordine di connessione lineare della V (o della F) è maggior d'uno (¹).

Si può dunque dire che:

Per una superficie regolare l'ordine di connessione lineare è uguale ad 1; oppure, in altri termini:

Ogni cammino chiuso reale tracciato sulla varietà riemanniana a quattro dimensioni, immagine di una superficie regolare, si può ridurre ad un punto per deformazione continua operata entro alla varietà stessa (²).

Questo teorema va confrontato col seguente, relativo alle curve razionali: « Sopra la superficie di Riemann, immagine d'una curva razionale, ogni « cammino chiuso può ridursi ad un punto per deformazione continua ».

Geometria. — *Sui gruppi di proiettività.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

In una Nota dello stesso titolo di questa, pubblicata testè nei Rendiconti dei Lincei (³), sono dimostrati o accennati alcuni teoremi generali sui gruppi di proiettività, includenti come caso assai particolare le teorie finora note. È scopo di questa seconda Nota preliminare il dare un nuovo punto di vista, sotto cui si può riguardare la nostra teoria, che serve a renderne lo svolgimento della massima semplicità e generalità.

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di proiettività unimodulari reali* $z_i' = \Sigma_k a_{ik} z_k$ *sia discontinuo (non contenga trasformazioni infinitesime) è che, scelto ad arbitrio un numero finito positivo* N, *o non esistano, o esista un numero finito di proiettività i cui coefficienti* a_{ik} *sono in valore assoluto minori di* N *(e ciò qualunque sia il numero* N *scelto).*

Infatti, se il gruppo non è discontinuo, esistono in esso infinite trasformazioni pochissimo differenti dall'identità, i cui coefficienti sono chiaramente minori p. es. di 2 in valore assoluto. Viceversa se esistono infinite proiettività del gruppo, a coefficienti minori di N in valore assoluto, esse avranno *almeno* una proiettività limite P, a coefficienti finiti, unimodulare. Si potranno perciò trovare due proiettività del gruppo, distinte, e differenti di quanto poco si vuole dalla P e perciò anche differenti di quanto poco si vuole l'una dall'altra. Il prodotto di una per l'inversa dell'altra sarà una

(¹) Picard et Simart, pag. 150.

(²) In particolare si ha il teorema di Picard già citato (P. et S., pp. 91 e 119), relativo alle superficie prive di punti multipli; e l'estensione di questo teorema dovuta a Berry (Acta math., 27, 1903, pag. 157).

(³) Fasc. 2°, 2° sem., 1904.

proiettività infinitesima, appartenente al gruppo; questo non è dunque discontinuo.

II. *Se una proiettività* P *reale unimodulare muta una forma quadrica definita non degenere in una forma infinitamente vicina, i suoi coefficienti sono minori di un numero finito.* Se la forma è p. es. $\Sigma_k x_i^2$, sarà $\sum_k a_{ik}^2$, per ogni valore di i, pochissimo differente da 1; e perciò le a_{ik} sono tutte p. es. minori in valore assoluto di 2.

III. *Se un gruppo contiene proiettività, che mutano una forma quadrica definita non degenere in una forma infinitamente vicina* (vicina quanto si vuole), *esso non è discontinuo.* Infatti per I esso conterebbe trasformazioni infinitesime, perchè dall' ipotesi fatta si deduce per II che il gruppo contiene infinite trasformazioni a coefficienti minori di 2. Ne discende subito:

IV. *Un gruppo reale discontinuo di proiettività opera in modo propriamente discontinuo sulle forme quadriche definite*: questo è appunto un teorema della Nota precedente, che include in sè come caso particolarissimo il teorema di Poincaré sui gruppi Fuchsiani.

V. *Un gruppo reale discontinuo di proiettività lasciante fissa una forma quadrica definita è finito.* È immediata conseguenza di II, I.

VI *Tutti questi teoremi si possono estendere ai sistemi di forme definite, ai gruppi immaginarii, alle forme e ai sistemi di forme Hermitiane. Essi si possono anche estendere alle forme definite non degeneri di grado superiore al secondo, ampliando così a nuovi campi la teoria dei gruppi discontinui.*

VII. Anche il teorema generale (e le sue generalizzazioni) accennato in fine della precedente Nota discende subito dalle nostre considerazioni. Ricorderò anzitutto il teorema: *Un gruppo di proiettività in uno spazio* S, *che lasci fissa una varietà* F, *è propriamente discontinuo in quella regione* R *di* S (*se esiste*), *la quadriche polari dei cui punti sono del tipo ellittico o iperbolico e contengono in questo secondo caso all'interno il proprio polo.* Infatti una proiettività del gruppo che porti un punto A di R in un punto infinitamente vicino porta anche il cono di vertice A tangente alla quadrica polare di A (il quale è per ipotesi a generatrici immaginarie) in un cono infinitamente vicino. È vero che questo cono è rappresentato da una forma quadrica (definita) degenere, in quanto che la sua equazione ha il primo membro (in un opportuno sistema coordinato) indipendente da x_1 (se $x_1 = 0$ è l' iperpiano polare di A); ma basta pensare che, se A va in un punto infinitamente vicino, anche detto iperpiano va in un iperpiano infinitamente vicino, perchè le considerazioni precedenti valgano ancora in pieno rigore.

VIII. I nostri metodi permettono anzi di completare il precedente risultato. A ciascun punto A di S sono connessi invariabilmente più coni, p. es. i coni di vertice A tangenti a F, o a una delle varietà polari di A rispetto a F. Noi avevamo definito come regione R quella, tale che il cono avente per vertice un suo punto A e tangente alla quadrica polare di A fosse a generatrici immaginarie; i nostri metodi permettono di *assumere a regione* R, *quella tale che uno qualunque dei coni invariabilmente connessi a un suo punto appartenga allo spazio ambiente e non a uno spazio subordinato e sia a generatrici immaginarie.* È così ampliato il campo in cui il nostro gruppo si riconosce propriamente discontinuo.

Mi pare che i teoremi precedenti (alle cui possibili generalizzazioni ho accennato nella prima Nota preliminare) portino la teoria dei gruppi generali di proiettività alla massima generalità e semplicità desiderabile.

Oss. Iª. Per l'estensione VIII e per la seconda parte di quanto si è detto a VI *basta dimostrare che il teorema* II *vale per forme definite di grado anche superiore al* II. Sia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una tale forma; i coefficienti di $x_1^m, x_2^m \ldots\ldots$ (dove m è il grado di f) sono certamente differenti da zero, anzi positivi, se come possiamo supporre, f è definita positiva. Noi li indicheremo con $b_1, b_2 \ldots\ldots$ Diamo a una qualunque delle x il valore 1, mentre alle altre x diamo valori reali in modulo minori di 1. I valori corrispondenti di f avranno un certo minimo p, non nullo, anzi, per l'ipotesi fatta, positivo. Se perciò noi diamo alle x dei valori reali, di cui il più grande (in valore assoluto) è N, il valore corrispondente di f è certo non minore di $p\,\mathrm{N}^m$. Perciò, se f è uguale a una certa quantità finita, i valori corrispondenti delle x sono in modulo minori di una quantità finita. Ma se la $x_i' = \Sigma_k a_{ik} x_k$ muta f in una forma infinitamente vicina è $f(a_{1i}, a_{2i}, \ldots a_{ni})$ pochissimo differente da b_i e perciò finito. Dunque, per quanto abbiamo detto, tutte le a_{ik} sono inferiori a una certa quantità finita c. d. d.

Oss. IIª. Se noi abbiamo una metrica qualunque, definita da una forma differenziale quadratica positiva e ricordiamo che un movimento $x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è definito, appena, in un punto generico, sono note le f e le derivate, troviamo coi metodi precedenti: *Un gruppo discontinuo di movimenti in una metrica qualunque è propriamente discontinuo in generale.* Ciò che include di nuovo i teor. VII, VIII perchè ogni tal gruppo si può considerare come gruppo di movimenti nella metrica $\sum \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \, \partial x_k} dx_i . dx_k$ ecc., dove le x si suppongano p. es. legate dalla $f =$ costante.