ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 18 settembre 1904.

Matematica. — *Sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Diciamo equazione di Moutard un'equazione a derivate parziali del 2° ordine del tipo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta, \tag{1}$$

dove M è una funzione assegnata delle due variabili indipendenti u, v.

È nota la generale *trasformazione di Moutard*, colla quale, mediante una soluzione particolare R della equazione (1), questa si trasforma nella equazione di Moutard contigua

$$\frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial u\, \partial v} = \overline{M}\,\overline{\theta}, \tag{2}$$

con

$$\overline{M} = R \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Si passa da una soluzione θ della (1) alla corrispondente $\overline{\theta}$ della (2) con una quadratura secondo le formole

$$\frac{\partial(\overline{\theta} + \theta)}{\partial u} = (\theta - \overline{\theta}) \frac{\partial \log R}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial(\overline{\theta} - \theta)}{\partial u} = -(\theta + \overline{\theta}) \frac{\partial \log R}{\partial v}, \tag{3}$$

sicchè data θ la $\overline{\theta}$ contiene ancora una costante arbitraria.

Prendiamo ora un numero qualunque >1 diciamo $n+1$, di soluzioni

$$\theta_0\,,\,\theta_1\,,\,\theta_2\ldots\theta_n$$

della (1) e siano

$$\overline{\theta}_0\,,\,\overline{\theta}_1\,,\,\overline{\theta}_2\ldots\overline{\theta}_n$$

le corrispondenti soluzioni della (2), ciascuna fissata col fissare il valore della costante arbitraria contenutavi. Noi ci proponiamo ora di risolvere la questione seguente:

Può accadere che la trasformazione di Moutard conservi la somma dei quadrati delle $n+1$ soluzioni θ_i, che si abbia cioè

$$\sum_i^{0\ldots n}\theta^2{}_i=\sum_i^{0\ldots n}\overline{\theta}^2{}_i\,?$$

Poniamo in questa ipotesi

$$\sum_i^{0\ldots n}\theta^2{}_i=\sum_i^{0\ldots n}\overline{\theta}^2{}_i=\varrho \tag{4}$$

ed inoltre introduciamo un angolo σ tale che:

$$\sum_i^{0\ldots n}\theta_i\,\overline{\theta}_i=\varrho\cos\sigma\ (^1)\,. \tag{4*}$$

Se prendiamo le corrispondenti formole (3):

$$\frac{\partial(\overline{\theta}_i+\theta_i)}{\partial u}=(\theta_i-\overline{\theta}_i)\frac{\partial\log\mathrm{R}}{\partial u}$$
$$(i=0\,,1\,,\ldots n)$$

e le moltiplichiamo una prima volta per θ_i, una seconda per $\overline{\theta}_i$ indi sommiamo rispetto ad i da o a n, otteniamo

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\sum_i^{0\ldots n}\theta_i\frac{\partial\overline{\theta}_i}{\partial u}&=\quad\varrho(1-\cos\sigma)\frac{\partial\log\mathrm{R}}{\partial u}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\sum_i^{0\ldots n}\overline{\theta}_i\frac{\partial\theta_i}{\partial u}&=-\varrho(1-\cos\sigma)\frac{\partial\log\mathrm{R}}{\partial u}\end{aligned}\right.$$

e queste sommate ci danno

$$\frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial u}=-\frac{\partial\varrho}{\partial u}\,. \tag{5}$$

(1) Nell'ipotesi di funzioni e formole reali l'angolo σ sarà pure reale.

Similmente procedendo sulle seconde equazioni (3)

$$\frac{\partial(\bar{\theta}_i - \theta_i)}{\partial v} = -(\theta_i + \bar{\theta}_i)\frac{\partial \log R}{\partial v},$$

deduciamo le due

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i^{0\ldots n} \theta_i \frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial v} = -\varrho(1+\cos\sigma)\frac{\partial \log R}{\partial v} \\ -\sum_i^{0\ldots n} \bar{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial v} = -\varrho(1+\cos\sigma)\frac{\partial \log R}{\partial v} \end{array}\right.$$

e sottraendo

(5*) $$\frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial v} = \frac{\partial \varrho}{\partial v}.$$

Dalle (5), (5*) deduciamo

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

indi

$$\varrho = U + V$$

essendo U una funzione della sola u, V della sola v. Le equazioni stesse danno poi

$$\frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial u} = -U', \quad \frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial v} = V',$$

gli apici indicando derivate, e integrando si ha per $\cos\sigma$ la formola

(6) $$\cos\sigma = \frac{V - U + 2h}{U + V}$$

dove h indica una costante arbitraria. Insieme alla (6) conviene tenere presenti le equivalenti

(6*) $$1 - \cos\sigma = \frac{2(U-h)}{U+V}, \quad 1 + \cos\sigma = \frac{2(V+h)}{U+V}$$

Vediamo dunque intanto che: *se la trasformazione di Moutard conserva la somma dei quadrati delle $n+1$ soluzioni $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$, questa somma ha necessariamente la forma*

(7) $$\sum_i^{0\ldots n} \theta_i^2 = U + V.$$

Quando una tale relazione sia verificata diremo, con Guichard, che

$$\theta_0\,,\ \theta_1\,,\ \theta_2\,,\ldots\,\theta_n$$

formano un *gruppo di soluzioni quadratiche* della equazione di Moutard.

Le trasformazioni cercate possono dunque aver luogo soltanto per equazioni di Moutard dotate di gruppi di soluzioni quadratiche, che vengano trasformati in altri gruppi di soluzioni quadratiche delle nuove equazioni.

Questi risultati preliminari conducono a proporre il problema generale seguente:

A) *Data un'equazione* (1) *di Moutard con un gruppo* $(\theta_0\,,\,\theta_1\,,\,\theta_0\,,\ldots\,\theta_n)$ *di* $n+1$ *soluzioni quadratiche, per le quali adunque*

$$\theta^2_0+\theta^2_1+\cdots+\theta^2_n=\mathrm{U}+\mathrm{V},$$

trovare tutte le trasformate contigue di Moutard, la somma dei quadrati delle cui soluzioni corrispondenti

$$\overline{\theta}_0\,,\ \overline{\theta}_1\,,\ldots\,\overline{\theta}_n$$

conserva il medesimo valore $\mathrm{U}+\mathrm{V}$.

In questa Nota daremo la soluzione completa di questo problema e dimostreremo che esistono in effetto ∞^n tali trasformate contigue di Moutard. La loro ricerca dipende dall'integrazione di un sistema completamente integrabile di equazioni ai differenziali totali per n funzioni incognite, ossia dall'integrazione di equazioni differenziali ordinarie. Questo sistema possiede poi una notevole proprietà che semplicizza grandemente, come si vedrà, l'applicazione successiva del processo di trasformazione.

2. Prima di procedere alla risoluzione del nostro problema A) sarà opportuno indicarne il significato geometrico pei casi più semplici di $n=2$, $n=3$ (¹).

Le equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche si presentano in effetto in varî problemi di geometria infinitesimale. Il primo e più semplice caso è quello delle equazioni di Moutard dotate di un gruppo di tre soluzioni quadratiche $\theta_0\,,\,\theta_1\,,\,\theta_2$ tali che $\theta^2_0+\theta^2_1+\theta^2_2=1$, riducendosi qui le funzioni U . V a costanti. La ricerca di queste equazioni equivale perfettamente a quella delle superficie pseudosferiche (di curvatura costante negativa) e la nota teoria delle trasformazioni di queste superficie risolve pel caso attuale il problema A), dimostrando che una tale equazione di Moutard possiede ∞^2 trasformate contigue della medesima specie, conformemente alla proprietà generale enunciata alla fine del n. 1.

Rimanendo ancora nel caso $n=2$, ma supponendo ora che U , V non siano più costanti, la ricerca delle equazioni di Moutard dotate di un gruppo

(¹) Il caso $n=1$ è d'immediata risoluzione e non occorre insistervi.

di tre soluzioni quadratiche $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ corrisponde a due problemi geometrici fra loro equivalenti e cioè:

1° alla costruzione di quelle congruenze rettilinee le cui due falde focali si corrispondono per linee assintotiche ed hanno in punti corrispondenti eguale curvatura,

2° alla ricerca di quelle superficie sulle quali esiste un sistema coniugato di linee che si conserva coniugato in una deformazione continua della superficie, ossia, come si dice brevemente, alla ricerca delle superficie con un sistema coniugato *persistente*.

Le questioni geometriche ora indicate furono da me trattate in una Memoria del 1890 (1) e si trovano riportate nel 2° volume delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (pag. 74 e segg.).

Così pel caso $n = 2$ il problema A) era già completamente risoluto dalle indicate ricerche.

Anche per il caso seguente $n = 3$ il corrispondente problema della ricerca delle equazioni di Moutard con un gruppo di *quattro* soluzioni quadratiche $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, tali cioè che sia

$$\theta^2_0 + \theta^2_1 + \theta^2_2 + \theta^2_3 = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

ammette una notevole interpretazione geometrica, analoga alla precedente. Esso equivale alla ricerca delle superficie deformabili con sistema coniugato persistente *nello spazio ellittico*, o spazio di curvatura costante positiva. In particolare, quando le funzioni U, V si riducono a costanti, abbiamo le *superficie di Voss* dello spazio ellittico, cioè le superficie di questo spazio dotate di un doppio sistema coniugato di linee geodetiche. Un altro aspetto geometrico del problema stesso risulta dalle ricerche di Schur sulle varietà a tre dimensioni dello spazio euclideo a quattro dimensioni deformabili con continuità entro questo spazio (2). Come Schur dimostrò, il problema di trovare le ipersuperficie deformabili entro l' S_4 euclideo equivale appunto alla ricerca delle superficie con sistema coniugato persistente dello spazio ellittico a tre dimensioni, e si traduce dunque anch'esso nella ricerca delle equazioni di Moutard con gruppi di *quattro* soluzioni quadratiche. Le ricerche geometriche ora appena indicate in questa breve Nota verranno sviluppate in una mia Memoria di prossima pubblicazione negli Atti della Società dei XL.

(1) *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali*. Annali di matematica, serie 2a, t. 18.

(2) È ben noto che in generale entro lo spazio euclideo ad n dimensioni, appena $n > 3$, le varietà ad $n - 1$ dimensioni (ipersuperficie) sono *indeformabili* (v. *Lezioni* ecc., vol. I, pag. 465).

Infine dobbiamo dire che il sig. Guichard, nelle sue belle ricerche: *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques* [1], particolarmente nell' ultima Memoria del 1903, si è occupato diffusamente delle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche e ne ha fatto conoscere varie interessanti oroprietà.

3. Proseguendo ora l'analisi iniziata al n. 1. supponiamo che l'equazione (1) di Moutard possegga il gruppo di $n+1$ soluzioni quadratiche

$$\theta_0 \,, \theta_1 \,, \theta_2 \,, \dots \theta_n$$

legate dalla relazione

$$\theta^2{}_0 + \theta^2{}_1 + \theta^2{}_2 + \cdots + \theta^2{}_n = \mathrm{U} + \mathrm{V}.$$

Se facciamo nella (1) un cambiamento proporzionale di funzione incognita ponendo

$$x = \frac{\theta}{\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}}\,, \tag{8}$$

la (1) diventa

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{F}x = 0, \tag{9}$$

avendo posto

$$\mathrm{F} = -\mathrm{M} - \frac{\mathrm{U}'\,\mathrm{V}'}{4(\mathrm{U}+\mathrm{V})^2}. \tag{10}$$

Indicando con $x_0 \,, x_1 \,, \dots x_n$ le soluzioni della (9) corrispondenti alle $\theta_0 \,, \theta_1 \,, \dots \theta_n$ della (1), sicchè

$$x_i = \frac{\theta_i}{\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}} \qquad (i = 0\,,1\,,\dots n),$$

avremo

$$\sum_i^{0,\dots n} x^2{}_i = x^2{}_0 + x^2{}_1 + \cdots + x^2{}_n = 1\,,$$

indi

$$\sum_i^{0\dots n} x_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum_i^{0\dots n} x_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0\,,$$

$$\sum_i^{0\dots n} x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} = -\sum_i^{0\dots n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

Dopo ciò se moltiplichiamo la relazione

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} + \frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\frac{\partial x_i}{\partial v} + \mathrm{F}x_i = 0$$

[1] Annales de l'École Normale Supérieure, t. XIV (1897), t. XV (1898) e t. XX (1903).

per x_i e sommiamo da $i=0$ a $i=n$, ne deduciamo quest' altra espressione di F:

$$\mathrm{F}=\sum_i^{0\ldots n}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{11}$$

Ciò premesso, costruiamo un determinante *ortogonale* d'ordine $n+1$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots x_n \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \ldots x_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \ldots x_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

la cui prima riga è costituita dalle soluzioni $x_0, x_1, \ldots x_n$ della (9) e le altre da elementi $x_i^{(\lambda)}$, funzioni di u, v, scelti in guisa da formare il quadro di una sostituzione ortogonale, ma del resto arbitrarî. Per uniformità di notazione indicheremo anche la prima riga di Δ con

$$x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)},$$

sicchè per convenzione $x_i^{(0)}=x_i$.

Così avremo le relazioni

$$\sum_\lambda^{0\ldots n} x_\lambda^{(i)}\, x_\lambda^{(k)}=\varepsilon_{ik}\ (i, k=0, 1, \ldots n). \tag{12}$$

denotando ε_{ik} l'unità se $i=k$, e lo zero per $i \neq k$. Insieme alle (12) sussisteranno anche le formole corrispondenti per colonne:

$$\sum_\lambda^{0\ldots n} x_i^{(\lambda)}\, x_k^{(\lambda)}=\varepsilon_{ik}\ (i, k=0, 1, \ldots n). \tag{12*}$$

Ora è ben noto, e risulta da considerazioni elementari, che le derivate rapporto ad u, v di ciascun elemento di Δ si esprimono linearmente ed omogeneamente per gli elementi della medesima colonna, con coefficienti che rimangono gli stessi per tutte le colonne. Questi coefficienti, che si dicono opportunamente le *rotazioni* relative a Δ, sono dati dalle formole:

$$\left\{\begin{aligned} p_{ik} &= \sum_\lambda^{0\ldots n} x_\lambda^{(k)}\frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial u}=-\sum_\lambda^{0\ldots n} x_\lambda^{(i)}\frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial u} \\ q_{ik} &= \sum_\lambda^{0\ldots n} x_\lambda^{(k)}\frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial v}=-\sum_\lambda^{0\ldots n} x_\lambda^{(i)}\frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Ne risultano le formole

$$p_{ki} = -p_{ik} \quad , \quad q_{ki} = -q_{ik} \, ,$$

indi $p_{ii} = 0$, $q_{ii} = 0$.

Introdotte le rotazioni, le indicate formole per le derivate degli elementi di Δ si scrivono:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial u} = \sum_k^{0\dots n} p_{ik}\, x_\lambda^{(k)} \quad , \quad \frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial v} = \sum_k^{0\dots n} q_{ik}\, x_\lambda^{(k)} \, .$$

$$(i \, , \lambda = 0 \, , 1 \, , \dots n).$$

Le rotazioni p_{ik} , q_{ik} soddisfano poi alle relazioni differenziali seguenti, che sono le condizioni d'integrabilità per le (1):

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial p_{ik}}{\partial v} - \frac{\partial q_{ik}}{\partial u} = \sum_l^{0\dots n} (p_{lk}\, q_{il} - q_{lk}\, p_{il}) \, .$$

Queste sono relazioni generali a cui soddisfanno le rotazioni in ogni determinante ortogonale, ma nel caso nostro sussistono di più le seguenti:

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p_{ok}}{\partial v} &= -\frac{V'}{2(U+V)}\, p_{ok} - \frac{U'}{2(U+V)}\, q_{ok} + \sum_l^{0\dots n} p_{ol}\, q_{kl} \\ \frac{\partial q_{ok}}{\partial u} &= -\frac{V'}{2(U+V)}\, p_{ok} - \frac{U'}{2(U+V)}\, q_{ok} + \sum_l^{0\dots n} q_{ol}\, p_{kl} , \end{aligned} \right.$$

le quali dipendono dal fatto che nel caso attuale gli elementi della prima riga in Δ sono soluzioni della (9).

4. Preparate così le formole fondamentali, veniamo alla nostra ricerca supponendo che sia R una tale soluzione delle (1) da trasformare $\theta_0 , \theta_1 , \dots \theta_n$ in un nuovo gruppo $\overline{\theta}_0 , \overline{\theta}_1 , \dots \overline{\theta}_n$ di soluzioni quadratiche della (2), tali che sia

$$\sum_i^{0\dots n} \overline{\theta}_i^{\,2} = \sum_i^{0\dots n} \theta_i^2 = U + V .$$

Sussisteranno le relazioni:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial(\overline{\theta}_i + \theta_i)}{\partial u} = (\theta_i - \overline{\theta}_i) \frac{\partial \log R}{\partial u} \, , \quad \frac{\partial(\overline{\theta}_i - \theta_i)}{\partial v} = -(\theta_i + \overline{\theta}_i) \frac{\partial \log R}{\partial v}$$

$$(i = 0 \, , 1 \, , \dots n),$$

e posto

$$\sum_i^{0\ldots n} \theta_i \,\overline{\theta}_i = (\mathrm{U} + \mathrm{V}) \cos\sigma\,,$$

per quanto si è visto al n. 1, avremo per l'angolo σ le formole (6), (6*).

In armonia colla (8) poniamo inoltre

$$\overline{x}_i^{(0)} = \overline{x}_i = \frac{\overline{\theta}_i}{\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}}\,,$$

ed avremo

$$(15) \qquad \sum_i^{0\ldots n} \overline{x}_i^{(0)^2} = 1 \quad , \quad \sum_i^{0\ldots n} x_i^{(0)}\, \overline{x}_i^{(0)} = \cos\sigma\,.$$

A causa di queste relazioni potremo determinare n tali funzioni

$$\lambda_1\,, \lambda_2\,, \ldots \lambda_n$$

di $u\,, v$ che sussistano le $n+1$ relazioni

$$(16) \qquad \overline{x}_i^{(0)} = \cos\sigma\; x_i^{(0)} + \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k\, x_i^{(k)}$$

$$(i = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots n)\,,$$

dove le λ dovranno inoltre essere legate dalla relazione quadratica

$$(17) \qquad \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = \mathrm{sen}^2\,\sigma\,.$$

Dopo ciò vediamo che la soluzione più generale del nostro problema A) si otterrà cercando di determinare le $n+1$ funzioni incognite

$$\lambda_1\,, \lambda_2\,, \ldots \lambda_n\,, \mathrm{R}$$

di $u\,, v$ in guisa: 1° che sia soddisfatta la (17); 2° R sia una soluzione della (1); 3° risultino soddisfatte le relazioni:

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}_i^{(0)}}{\partial u} + \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial u} &= \quad (x_i^{(0)} - \overline{x}_i^{(0)})\,\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} - \frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\,(x_i^{(0)} + \overline{x}_i^{(0)}) \\ \frac{\partial \overline{x}_i^{(0)}}{\partial v} - \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial v} &= -(x_i^{(0)} + \overline{x}_i^{(0)})\,\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} - \frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\,(\overline{x}_i^{(0)} - x_i^{(0)})\,. \end{aligned}\right.$$

Ora se deriviamo le (16) rapporto ad u, v, utilizzando le formole del numero precedente, troviamo:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_i^{(0)}}{\partial u} &= \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u}\, x_i^{(0)} + \cos\sigma \sum_k^{1\dots n} p_{ok}\, x_i^{(k)} + \sum_k^{1\dots n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u}\, x_i^{(k)} + \\ &\qquad + \sum_j^{1\dots n} \lambda_j \sum_k^{0\dots n} p_{jk}\, x_i^{(k)} \\ \frac{\partial \bar{x}_i^{(0)}}{\partial v} &= \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v}\, x_i^{(0)} + \cos\sigma \sum_k^{1\dots n} q_{ok}\, x_i^{(k)} + \sum_k^{1\dots n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial v}\, x_i^{(k)} + \\ &\qquad + \sum_j^{1\dots n} \lambda_j \sum_k^{0\dots n} q_{jk}\, x_i^{(k)} . \end{aligned}\right.$$

Sostituiamo nelle (18) questi valori di $\dfrac{\partial \bar{x}_i^{(0)}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \bar{x}_i^{(0)}}{\partial v}$ e per le derivate di $x_i^{(0)}$ i valori che seguono dalle (14). Ciascuna delle (18) dà così luogo ad $n+1$ relazioni lineari omogenee in

$$x_i^{(0)} \;,\; x_i^{(1)} \;,\; \dots x_i^{(n)}$$

con coefficienti indipendenti dall'indice i. Queste relazioni, essendo $\Delta \neq 0$, debbono dunque risolversi in altrettante identità.

5. L'uguagliare a zero i coefficienti di $x_i^{(0)}$ nelle due relazioni (18) così calcolate porge le due equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} + \sum_j^{1\dots n} p_{jo}\, \lambda_j &= (1-\cos\sigma)\frac{\partial \log R}{\partial u} - \frac{U'}{2(U+V)}(1+\cos\sigma) \\ \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} + \sum_j^{1\dots n} q_{jo}\, \lambda_j &= -(1+\cos\sigma)\frac{\partial \log R}{\partial v} + \frac{V'}{2(U+V)}(1-\cos\sigma) , \end{aligned}\right.$$

le quali, essendo

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -\frac{U'}{U+V}(1+\cos\sigma) \quad , \quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = \frac{V'}{U+V}(1-\cos\sigma) ,$$

si scrivono:

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log R}{\partial u} &= -\frac{U'}{2(U+V)}\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma} + \sum_j^{1\dots n} \frac{p_{jo}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma} \\ \frac{\partial \log R}{\partial v} &= -\frac{V'}{2(U+V)}\,\frac{1-\cos\sigma}{1+\cos\sigma} - \sum_j^{1\dots n} \frac{q_{jo}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma} \end{aligned}\right.$$

e determinano R con una quadratura, note che siano le λ.

Ora se eguagliamo a zero il coefficiente di $x_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ nelle due relazioni (18), troviamo le seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} + (1 + \cos\sigma)\, p_{ok} + \sum_j^{1\cdots n} p_{jk}\,\lambda_j = -\left(\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} + \frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\right)\lambda_k \\ &\frac{\partial \lambda_k}{\partial v} - (1 - \cos\sigma)\, q_{ok} + \sum_j^{1\cdots n} q_{jk}\,\lambda_j = -\left(\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} + \frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\right)\lambda_k . \end{aligned}\right.$$

Eliminandone colle (19) le derivate di log R, abbiamo le formole definitive:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} &= -(1 + \cos\sigma)\, p_{ok} - \sum_j^{1\cdots n} p_{jk}\,\lambda_j + \\ &\quad + \left(\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\,\frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma} - \sum_j^{1\cdots n} \frac{p_{jo}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma}\right)\cdot \lambda_k \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} &= \quad (1 - \cos\sigma)\, q_{ok} - \sum_j^{1\cdots n} q_{jk}\,\lambda_j + \\ &\quad + \left(-\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\,\frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma} + \sum_j^{1\cdots n} \frac{q_{jo}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma}\right)\cdot \lambda_k \\ k &= 1, 2, \ldots n \end{aligned}\right.$$

Così abbiamo ottenuto per le funzioni incognite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ il sistema (20) di equazioni ai differenziali totali pel quale, con opportuni calcoli, si trovano verificate le proprietà seguenti:

a) le condizioni d'integrabilità sono *identicamente* soddisfatte, a causa delle relazioni (II), (III) per le rotazioni;

b) l'equazione in termini finiti (17), derivata rapporto ad u, v, conduce ad equazioni che sono conseguenze della (17) e delle (20) stesse.

Ne risulta che possiamo soddisfare tutte le nostre equazioni per le λ restando arbitrarî, per un sistema iniziale (u_0, v_0) di valori di u, v, i valori iniziali delle λ, purchè vincolati dalla (17). Così, computando anche h che figura in $\cos\sigma$, si introducono precisamente n costanti arbitrarie.

D'altra parte, una volta determinate le λ in guisa da soddisfare al sistema (17), (20), si vede che le due equazioni (19) sono compatibili e la funzione R, così determinata con una quadratura, risulta in effetto una soluzione dell'equazione (1) di Moutard.

Abbiamo così stabilito il risultato finale che avevamo in vista:

Un'equazione di Moutard con un gruppo di $n+1$ *soluzioni quadratiche* $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ *possiede* ∞^n *trasformate contigue di Moutard della* *stessa specie, per le quali rimane la stessa la somma dei quadrati delle $n+1$ soluzioni corrispondenti $\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1, \ldots \overline{\theta}_n$.*

Quanto al problema di costruire effettivamente queste ∞^n trasformate, esso dipende dall'integrazione del sistema (20) di equazioni differenziali simultanee in cui i secondi membri sono funzioni quadratiche delle λ. Nel caso particolare $n=2$, di cui già abbiamo detto il significato geometrico (n. 2), ponendo

$$\lambda_1 = \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi \quad , \quad \lambda_2 = \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi$$

si ha per l'unica incognita $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ un'equazione del tipo di Riccati che si integra con quadrature appena noto un integrale particolare.

6. Ma pur rimanendo nel caso di n qualunque, ove le teorie generali nulla ci apprendono rispetto alla effettiva integrazione del sistema (20), possiamo stabilire una notevole proprietà del sistema stesso dimostrando che:

Se per l'equazione di Moutard primitiva (1) *il sistema* (20) *si sa integrare completamente, sono senz'altro integrati in termini finiti i sistemi differenziali analoghi per le equazioni di Moutard trasformate della primitiva.*

Tale proprietà dipende dal seguente *teorema di permutabilità*, di cui mi limito qui a dare l'enunciato colle formole relative:

Se ad un'equazione E *di Moutard col gruppo di soluzioni quadratiche* $(\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n)$ *sono contigue due equazioni trasformate* E′, E″ *coi rispettivi gruppi corrispondenti* $(\theta_0', \theta_1', \ldots \theta_n')$, $(\theta_0'', \theta_1'', \ldots \theta_n'')$, *esiste una quarta equazione* $\overline{\mathrm{E}}$ *di Moutard, univocamente determinata, contigua, come* E, *ad* E′, E″ *dotata di un corrispondente gruppo* $(\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1, \ldots \overline{\theta}_n)$ *di soluzioni quadratiche. Note* E, E′, E″ *e i relativi gruppi di soluzioni quadratiche, il gruppo* $\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1, \ldots \overline{\theta}_n$ *corrispondente per la* $\overline{\mathrm{E}}$ *si calcola in termini finiti.*

Resta che diamo le effettive formole per calcolare le $\overline{\theta}_i$ $(i=0,1,\ldots n)$. Indichiamo per ciò con σ' il valore dell'angolo σ nel passaggio da E ad E′ e con

$$\lambda_0', \lambda_1', \ldots \lambda_n'$$

i corrispondenti valori di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ e così $\sigma'', \lambda_1'', \lambda_2'', \lambda_n''$ abbiano un significato analogo pel passaggio da E ad E″. Le formole richieste si scrivono semplicemente:

$$\overline{\theta}_i = \theta_i + \frac{\cos\sigma' - \cos\sigma''}{\sum\limits_k^{1\ldots n} \lambda_k' \lambda_k'' + \cos\sigma'\cos\sigma'' - 1} (\theta_i' - \theta_i'')$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Si osserverà che quando $\cos\sigma' = \cos\sigma''$ $(k' = k'')$, ed in questo caso soltanto, la quarta equazione $\overline{\mathrm{E}}$ coincide colla primitiva.