ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali per i risultanti e discriminanti di forme binarie.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Le equazioni differenziali cui soddisfanno i risultanti e discriminanti di forme binarie furono trovate e studiate da moltissimo tempo da Brioschi, (*Crelle*, 53, pag. 372; *Ann. di Mat.* (1), t. II, 1859, pag. 82; v. *Opere Matem.*, t. I, pag. 377); da Faà di Bruno, (*Crelle*, 54, pag. 283); da Gordan, (*Gött. Nach.*, 1870, pag. 427, per il caso degli ordini disuguali); da Noether, (v. Faà di Bruno-Walter, *Einleitung in die Theor. d. bin. Formen*, Leipzig, 1881, pag. 427).

Lo scopo di questa Nota è di esporre qualche nuova considerazione, che non mi sembra priva di eleganza e di interesse, relativamente ad un metodo di ricerca di tali equazioni, le quali ottengo dopo aver determinato una certa serie di trasformazioni per le quali il risultante resta invariato.

L'ultima parte della Nota è dedicata alla ricerca del modo di dedurre le equazioni differenziali per il discriminante da quelle per il risultante, deduzione che non si trova in alcuno dei sunnominati autori, e che non è così naturale ed agevole quanto potrebbe supporsi a prima vista.

1. Supponiamo prima le due binarie dello stesso ordine:

$$f = a_x{}^n \ , \ \varphi = b_x{}^n = p_{1x}\, p_{2x} \,.....\, p_{nx} \ .$$

Il risultante R è espresso simbolicamente da:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{R} = (ap_1)^n\, (a'p_2)^n \,.....\, (a^{n-1}\, p_n)^n$$

essendo a, a', ... simboli, fra loro equivalenti, della f.

Introduciamo ora la forma (di Cayley):

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{F} = \frac{f(x)\,\varphi(y) - \varphi(x)\,f(y)}{(xy)}$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n-1} c_{ij}\, x_1{}^{n-1-i}\, x_2{}^i\, y_1{}^{n-1-j}\, y_2{}^j \ . \ (c_{ij} = c_{ji})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} u_i\, x_1{}^{n-1-i}\, x_2{}^i$$

essendo:

$$\text{(3)} \qquad u_i = \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}\, y_1{}^{n-1-j}\, y_2{}^j$$

I coefficienti c sono formati in modo razionale ed intero mediante quelli di f e φ, e il loro determinante è, come si sa (v. Gordan, *Math. Ann.* III, pag. 355; Clebsch, *Th. d. bin. alg. Formen*, Leipzig, 1872, pag. 79), il risultante di f e φ.

Il risultante R_1 di F e φ si ottiene ponendo in F, in luogo delle x, i coefficienti di ciascuno dei fattori lineari di φ, cioè le p, e indi moltiplicando fra loro i risultati così ottenuti; si ha:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{(ap_1)^n\, b_y{}^n}{p_{1y}} \; \frac{(a'p_2)^n\, b'_y{}^n}{p_{2y}} \cdots\cdots \\
&= R\,.\,[\varphi(y)]^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Sieno ora z_1, z_2 dei parametri arbitrarî, e consideriamo le due forme (nelle x):

$$
\left\{
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{(xz)\,F}{\varphi(y)} + \frac{\varphi(x)\,f(y)}{\varphi(y)} = \\
&= \frac{1}{\varphi(y)} \left\{ (xz) \sum_{i=0}^{n-1} u_i\,(y)\; x_1{}^{n-1-i}\, x_2{}^i + f(y)\,\varphi(x) \right\} \\
\varphi_1 &= \sqrt[n]{\frac{\varphi(y)}{\varphi(z)}}\;\varphi(x)
\end{aligned}
\right.
\tag{5}
$$

le quali sono anche di ordine n (nelle x) come f e φ, e diventano, come è facile riconoscere, rispettivamente eguali a f e φ per $z = y$.

Esse soddisfanno alla notevole proprietà, che il loro risultante è lo stesso di quello di f e φ, cioè R.

Ciò si vede subito ponendo in f_1 in luogo delle x, i coefficienti di ciascuno dei fattori lineari di φ_1, che sono gli stessi di quelli di φ, e indi moltiplicando fra loro gli n risultati ottenuti e moltiplicando infine per la n^{ma} potenza del fattore costante pel quale φ_1 differisce da φ, cioè per $\dfrac{\varphi(y)}{\varphi(z)}$.

Abbiamo dunque il seguente importante risultato del quale ci serviremo per la ricerca delle richieste equazioni differenziali:

Il risultante di due binarie f e φ:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x_1{}^{n-i}\, x_2{}^i$$

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x_1{}^{n-i}\, x_2{}^i$$

non muta, se a queste due forme si sostituiscono rispettivamente f_1 e φ_1, *cioè esso è una tal formazione di a_i, b_i, che non muta se a questi coefficienti si sostituiscono rispettivamente gli altri:*

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} a'_i &= \frac{1}{\varphi(y)} \left\{ z_2\, u_i(y) - z_1\, u_{i-1}(y) + b_i\, f(y) \right\} \\ b'_i &= \sqrt[n]{\frac{\varphi(y)}{\varphi(z)}} \cdot b_i \end{aligned} \right.$$

dipendenti dai parametri arbitrari y_1, y_2, z_1, z_2, e che per $z = y$ diventano rispettivamente gli antichi a_i, b_i. (È bene notare che nelle prime delle (6), le u_n, u_{-1} devono però intendersi zero).

In sostanza: *le (6) rappresentano una serie di trasformazioni dei coefficienti a, b, delle due binarie, fra le quali è compresa anche la trasformazione identica, e per le quali il risultante resta invariato.*

Questa curiosa proprietà è quella donde prendono origine le equazioni differenziali *caratteristiche* per il risultante.

Ed infatti, per i principî elementari della teoria delle trasformazioni, si deduce allora che R deve restare inalterato per la trasformazione infinitesima della serie, cioè, considerando le z come parametri, per la trasformazione in cui le z differiscono dalle y per quantità infinitesime, e perciò R deve soddisfare ad un' equazione differenziale del tipo:

$$(7)\qquad \sum_i \mathrm{A}_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_i} + \sum \mathrm{B}_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial b_i} = 0$$

in cui A_i, B_i sono le derivate, per $z = y$, dei coefficienti trasformati a'_i, b'_i rispetto a z_1, ovvero rispetto a z_2. Si hanno così due equazioni che, contenendo gli altri parametri arbitrarî y, si scindono in più altre.

Calcolando le dette derivate, e ponendovi $z = y$, si hanno le formole:

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial a'_{i+1}}{\partial z_1} = -\frac{u_i(y)}{\varphi(y)} \quad , \quad \frac{\partial a'_i}{\partial z_2} = \frac{u_i(y)}{\varphi(y)} \\ &\left(\frac{\partial b'_i}{\partial z_1}\right)_{z=y} = -\frac{1}{n}\, b_i \frac{\dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial y_1}}{\varphi(y)} \;,\; \left(\frac{\partial b'_i}{\partial z_2}\right)_{z=y} = -\frac{1}{n}\, b_i \frac{\dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial y_2}}{\varphi(y)} \end{aligned} \right.$$

onde, sostituendo in (7) tali valori e tenendo conto della omogeneità di R nei coefficienti di φ, si hanno le due equazioni:

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} u_i(y) \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_{i+1}} &= -\mathrm{R} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_1} \\ \sum_{i=0}^{n-1} u_i(y) \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_i} &= +\mathrm{R} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_2} \end{aligned} \right.$$

le quali comprendono appunto quelle di Brioschi, stante l' arbitrarietà delle y (v. p. es. Faà di Bruno-Walter, op. cit., pag. 276) [1]. Scambiando poi f con φ si hanno le altre note formole.

2. Potrebbe credersi che, oltre le equazioni (9), se ne possano trovare delle altre in modo simile, e solo immaginando che i parametri delle trasformazioni (6) sieno le y e non le z, e quindi costruendo le derivate di a'_i, b'_i rispetto a y_1 o y_2, e non rispetto a z_1 o z_2, e poi ponendo $y=z$.

Ma è utile osservare che le equazioni che così vengono ad ottenersi non sono che conseguenze delle stesse (9). Ed infatti, eseguendo le derivate, si ha:

$$\frac{\partial a'_i}{\partial y_1}=\frac{1}{\varphi(y)}\left\{z_2\frac{\partial u_i(y)}{\partial y_1}-z_1\frac{\partial u_{i-1}(y)}{\partial y_1}+b_i\frac{\partial f(y)}{\partial y_1}\right\}-\frac{1}{\varphi^2(y)}\left\{z_2\,u_i(y)-z_1\,u_{i-1}(y)+b_i\,f(y)\right\}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial b'_i}{\partial y_1}=\frac{1}{n}\,b_i\,\varphi(y)^{\frac{1}{n}-1}\,\varphi(z)^{-\frac{1}{n}}\,\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_1}$$

e ponendo $y=z$, sostituendo i valori ottenuti in luogo delle A, B, nella formola (7), e osservando che per la *proprietà combinante* è:

$$\sum b_i\frac{\partial R}{\partial a_i}=0\,,$$

si ha:

$$\sum_i\frac{\partial R}{\partial a_i}\left\{\left(z_2\frac{\partial u_i(z)}{\partial z_1}-z_1\frac{\partial u_{i-1}(z)}{\partial z_1}\right)\varphi(z)-(z_2\,u_i-z_1\,u_{i-1})\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_1}\right\}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\varphi(z)=0 \tag{10}$$

e questa equazione è una conseguenza delle (9): infatti moltiplicando le (9) per y_1, y_2 e sottraendo si ha:

$$\sum_i(y_2\,u_i-y_1\,u_{i-1})\frac{\partial R}{\partial a_i}=nR\varphi(y)\,;$$

inoltre derivando le stesse rispetto a y_1, moltiplicando per y_1, y_2 e sottraendo, si ha:

$$\sum\left(y_2\frac{\partial u_i}{\partial y_1}-y_1\frac{\partial u_{i-1}}{\partial y_1}\right)\frac{\partial R}{\partial a_i}=(n-1)\,R\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$$

e da questa e dalla precedente, e mutando y in z, si ha appunto la (10).

[1] La diversità del segno dei secondi membri dipende solo dal fatto che i coefficienti c_{ij} adoperati da Faà di Bruno, o da altri, sono di segno contrario a quelli da noi introdotti.

3. Il metodo adoperato di sopra, si adatta anche al caso in cui gli ordini delle due forme sieno fra loro diversi.

Sia la φ di ordine $m < n$; formiamo allora, in luogo della F data dalla (2), la seguente (v. Gordan, *Math.* Ann. III, pag. 395):

$$\mathrm{F} = \frac{a_x{}^n\, b_y{}^m - b_x{}^m\, a_x{}^{n-m}\, a_y{}^m}{(xy)} \tag{11}$$

Costruendo le due forme (nelle x)

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \frac{(xz)\,\mathrm{F}}{\varphi(y)} + \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}\, \varDelta^m_{xy} f(x) \\ \varphi_1 &= \sqrt[n]{\frac{\varphi(y)}{\varphi(z)}} \cdot \varphi(x) \end{aligned}\right. \tag{12}$$

dove con $\varDelta^m_{xy}$ si intende la operazione di polare m^{ma} operata fra le variabili x e y, cioè con $\varDelta^m_{xy}\, f(x)$ si intende la espressione $a_x{}^{n-m}\, a_y{}^m$, si trova, come sopra, che il risultante di queste è lo stesso di quello di f e φ; onde operando come nel § 1, si trovano le medesime equazioni differenziali (9), dove però le u hanno naturalmente un diverso significato, e propriamente quello che a loro viene dal considerare la (11) invece della (2).

4. Le precedenti equazioni differenziali per il risultante di due forme presuppongono naturalmente che i coefficienti a, b di queste sieno fra loro *indipendenti*. Ora considerando il discriminante $\varDelta$ di una forma come il risultante delle due derivate prime di questa, si ha invece il caso che le due forme, di cui si deve calcolare il risultante, non hanno coefficienti fra loro indipendenti; non possono quindi *senz' altro* dedursi le equazioni differenziali del discriminante da quelle del risultante, per una ragione che il calcolo che qui segue mostrerà limpidamente.

Gli autori che si sono fin qui occupati di questo soggetto, hanno preferito sempre dedurre *direttamente* le equazioni differenziali pel discriminante; mi sembra pertanto interessante vedere con quale procedimento può superarsi la difficoltà cui abbiamo accennato.

Immaginando due forme di ordine $n-1$ coi coefficienti a, b, le equazioni per il risultante sono (paragonando i coefficienti delle medesime potenze delle y al primo e secondo membro delle (9)):

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} c_{ik}\, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_{k+1}} &= -(n-i-1)\, b_i\, \mathrm{R} \\ \sum_{k=0}^{n-2} c_{ik}\, \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial b_k} &= -(i+1)\, a_{i+1}\, \mathrm{R} \end{aligned}\right. \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2) \tag{13}$$

Se ora le due forme sono le derivate di una forma f di ordine n, i coefficienti a, b, saranno espressi mediante i coefficienti g di f colle formole:

$$\left\{\begin{aligned} a_i &= \frac{n-i}{n}\, g_i \\ b_{i-1} &= \frac{i}{n}\, g_i \end{aligned}\right. \tag{14}$$

e sostituendo tali valori in R, questa diventa il discriminante $\varDelta$ di f, e si ha:

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial g_{k+1}} = \frac{n-k-1}{n} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_{k+1}} + \frac{k+1}{n} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial b_k} \qquad (k=0\,,1\,,\ldots,n-2) \tag{15}$$

donde:

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k-1}{n}\, c_{ik} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a_{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{i+1}{n}\, c_{ik} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial b_k} = \sum_{k=0}^{n-2} c_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\partial g_{k+1}} \tag{16}$$

Se nei secondi membri delle (13) in luogo di a, b, poniamo i valori (14) e per R poniamo $\varDelta$, si hanno (facendo variare i da 0 ad $n-2$) $2(n-1)$ equazioni lineari nelle derivate di R, e colla (16) si hanno in tutto $2(n-1)+1$ equazioni dalle quali possono eliminarsi le $2(n-1)$ derivate di R rispetto ad $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0 \ldots . b_{n-2}$. Si ha così il determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \ldots\ldots & c_{0,n-2} & 0 & \ldots\ldots & 0 & -\frac{(n-1).1}{n} g_1 \varDelta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-2,0} & \ldots\ldots & c_{n-2,n-2} & 0 & \ldots\ldots & 0 & -\frac{1.(n-1)}{n} g_{n-1} \varDelta \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & c_{0,0} & \ldots\ldots & c_{0,n-2} & -\frac{(n-1).1}{n} g_1 \varDelta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & c_{n-2,0} & \ldots\ldots & c_{n-2,n-2} & -\frac{1.(n-1)}{n} g_{n-1} \varDelta \\ \frac{n-1}{n} c_{i0} & \ldots\ldots & \frac{1}{n} c_{i,n-2} & \frac{1}{n} c_{i0} & \ldots & \frac{n-1}{n} c_{i,n-2} & \sum_{k=0}^{n-2} c_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\partial g_{k+1}} \end{vmatrix} = 0$$

Sottragghiamo ora dall'ultima linea la $(i+1)^{\text{ma}}$ e indi dalla n^{ma} linea sottraghiamo la 1^{a}, dalla $(n+1)^{\text{ma}}$ la 2^{a}, e così di seguito; infine alla 1^{a}

colonna sommiamo la n^{ma}, alla 2^a la $(n+1)^{ma}$, ecc. Così facendo otteniamo il determinante:

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \ldots c_{0,n-2} & 0 \ldots & 0 & -\frac{(n-1).1}{n} g_1 \varDelta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-2,0} & \ldots c_{n-2,n-2} & 0 \ldots & 0 & -\frac{1.(n-1)}{n} g_{n-1} \varDelta \\ 0 & \ldots 0 & c_{0,0} & \ldots c_{0,n-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots 0 & c_{n-2,0} & \ldots c_{n-2,n-2} & 0 \\ 0 & \ldots 0 & \frac{1}{n} c_{i,0} & \frac{n-1}{n} c_{i,n-2}, & \sum_{k=0}^{n-2} c_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\partial g_{k+1}} + \frac{(n-i-1)(i+1)}{n} g_{i+1} \varDelta \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando questo determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna, si riconosce che i coefficienti di $g_1 \ldots g_{n-1}$ sono tutti zero, e quindi la precedente equazione si riduce semplicemente a

$$\sum_{k=0}^{n-2} c_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\partial g_{k+1}} = -\frac{(n-i-1)(i+1)}{n} g_{i+1} \varDelta \tag{17}$$

che è infatti una delle note equazioni per il discriminante (v. p. es. Faà di Bruno-Walter, op. cit., pag. 282, in cui si tenga conto del diverso significato delle g, e si osservi inoltre che le nostre c sono eguali e di segno contrario a quelle ivi adoperate).

Fisica. — *Sulla catodo-luminescenza dei cristalli.* Nota del dott. A. Pochettino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In un'appendice ad una Memoria di W. Crookes, pubblicata nelle Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1879, il prof. Maskelyne, dando notizia dei risultati di alcune sue esperienze sulla catodo-luminescenza di alcuni cristalli, riferisce che la luminescenza eccitata nello Smeraldo, nella Calamina e nel Zircone dai raggi catodici apparisce polarizzata, e cioè che viene eccitata della luce le cui vibrazioni si compiono parallelamente all'asse della massima elasticità ottica del cristallo; molti altri cristalli da lui studiati diedero luminescenza affatto priva di traccie di polarizzazione.

Io ho voluto estendere queste ricerche ad un numero più grande di minerali, e mi permetto di dare qui qualche notizia preliminare sui risultati *qualitativi* delle mie esperienze.