ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 16 ottobre 1904.

Matematica — *Sulla distribuzione delle radici della derivata di una funzione razionale intiera.* Nota del prof. CARLO ALBERTO DELL'AGNOLA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Sia $f(x)$ funzione razionale intiera di grado n della variabile complessa x e si consideri l'equazione

$$f(x) = y \,, \tag{1}$$

con y designando una nuova variabile complessa. Questa equazione stabilisce una rappresentazione del piano y sul piano x, tale che, ad una circonferenza del piano y col centro nell'origine, corrisponde nel piano x una curva di Cassini. Indicheremo brevemente con (ϱ) la circonferenza di raggio ϱ del piano y e con C_ϱ la corrispondente cassiniana. Inoltre designeremo con (r, r') la corona circolare del piano y limitata dalle circonferenze (r) ed (r'), $(r < r')$.

Talora diremo brevemente la curva C_ϱ nella corona circolare (r, r'), invece di dire la curva C_ϱ corrispondente ad una generica circonferenza (ϱ) contenuta in (r, r').

Se sulla circonferenza (ϱ) (qualunque sia il numero reale ϱ), non vi sono punti critici della funzione algebrica x di y definita dalla (1), la curva C_ϱ è formata da un certo numero di curve chiuse. In questa ipotesi, mi propongo di dimostrare il seguente

Teorema. « Il numero degli zeri di $f'(x)$ contenuti in ogni curva chiusa « appartenente alla C_ρ, è uguale a quello degli zeri di $f(x)$, contenuti nella « medesima curva, diminuito di una unità ».

Sieno $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ le radici distinte dell'equazione $f(x) = 0$; $r_1, r_2, \cdots, r_m$ i rispettivi ordini di molteplicità di guisa che $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$. Le $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ saranno radici dell'equazione

$$f'(x) = 0 \tag{2}$$

multiple rispettivamente degli ordini $r_1 - 1, r_2 - 1, \cdots, r_m - 1$. Indicando con $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ le rimanenti radici della (2) e con $s_1, s_2, \cdots, s_q$ gli ordini rispettivi di molteplicità, dovrà essere

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_q = m - 1. \tag{3}$$

L'origine del piano y è un punto critico multiplo di ordine $n - m$ della funzione algebrica x di y definita dalla (1): i rimanenti punti critici sono dati dalle

$$f(\beta_j) = z_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, q).$$

Posto $|z_j| = \varrho_j$ $(j = 1, 2, \cdots, q)$, possiamo supporre le β_j ordinate in guisa che $\varrho_1 \leq \varrho_2 \leq \varrho_3 \leq \cdots \leq \varrho_q$. Per semplicità supporremo nella dimostrazione

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_q \text{ [1]}.$$

In questa ipotesi sulla circonferenza (ϱ_i) vi è il solo punto critico z_i $(i = 1, 2, \cdots, q)$. Supponiamo che ϱ cresca con continuità. Finchè $\varrho < \varrho_1$, la C_ρ è costituita da m curve chiuse, che contengono rispettivamente i punti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. Tutte le volte che la circonferenza (ϱ) oltrepassa un punto critico, il numero delle curve chiuse facenti parte della C_ρ, diminuisce. Questo numero rimane invariato finchè (ϱ) si mantiene in una delle corone circolari $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$ $(i = 1, 2, \cdots q - 1)$.

Dimostriamo prima di tutto, che *il numero delle curve chiuse della* C_ρ *diminuisce di* s_i *unità, allorquando la circonferenza* (ϱ) *oltrepassa il punto critico* z_i $(i =, 1, 2, \cdots, q)$.

L'equazione $f(x) = z_1$ ammette $s_1 + 1$ radici eguali a β_1 e le altre radici sono, per l'ipotesi fatta, tutte fra di loro distinte. Ciò significa che la curva C_{ρ_1} è formata ancora da m curve chiuse, delle quali $h_1 + 1$ $(h_1 \leq s_1)$, hanno il punto β_1 in comune. Nella corona circolare (ϱ_1, ϱ_2), queste $h_1 + 1$

[1] Il ragionamento è perfettamente analogo nel caso in cui alcune delle ϱ_i, od anche tutte, sono fra di loro eguali.

curve vengono sostituite da un'unica curva chiusa; cosicchè la C_ρ, nella (ϱ_1, ϱ_2), risulta formata da $m - h_1$ curve chiuse. Analogamente si vede che nella corona circolare (ϱ_2, ϱ_3) la C_ρ è costituita da $m-(h_1+h_2)$ curve chiuse, essendo $h_2 \leq s_2$, e così via; in fine per $\varrho > \varrho_q$, la C_ρ risulta di $m - (h_1+h_2+\cdots+h_q)$ curve chiuse, essendo $h_3 \leq s_3, \cdots, h_q \leq s_q$. Ma noi sappiamo che per $\varrho > \varrho_q$ la C_ρ si riduce ad un'unica curva chiusa, per cui

$$m-(h_1+h_2+\cdots+h_q)=1\,,$$

donde

$$h_1+h_2+\cdots+h_q = m-1\,.$$

Questa, confrontata con la (3), ci dice che $h_1 = s_1$, $h_2 = s_2, \cdots, h_q = s_q$. Ciò premesso, la dimostrazione del teorema enunciato non presenta alcuna difficoltà.

Se $\varrho < \varrho_1$ il teorema è evidente. Supponiamolo vero nella corona circolare $(\varrho_{i-1}, \varrho_i)$ e dimostriamo che esso sussiste altresì nella corona successiva $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$.

Nella corona $(\varrho_{i-1}, \varrho_i)$ la C_ρ è formata, come abbiamo visto, da $m-(s_1+s_2+\cdots+s_{i-1})$ curve chiuse; di queste, s_i+1, che chiameremo $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{s_i+1}$, danno origine ad una unica curva chiusa γ, pel passaggio della circonferenza (ϱ) dalla corona $(\varrho_{i-1}, \varrho_i)$ alla successiva $(\varrho_i, \varrho_{i+1})$. Basterà evidentemente dimostrare il teorema per la curva γ. Teniamo presente che le curve γ_j sono contenute in γ. Sia μ_j il numero degli zeri di $f(x)$ contenuti in γ_j $(j=1, 2, \cdots, s_i+1)$. Evidentemente la curva γ contiene tanti zeri della $f(x)$ quanti sono quelli contenuti complessivamente nelle curve γ_j, vale a dire $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{s_i+1}$.

Nella curva γ vi sono s_i zeri di $f'(x)$ coincidenti con β_i. Gli altri zeri di $f'(x)$ contenuti in γ sono quelli interni alle curve γ_j, il cui numero complessivo è, per dato, $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{s_i+1}-(s_i+1)$. In totale abbiamo dunque $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{s_i+1}-1$ zeri di $f'(x)$ interni a γ, ciò che dimostra il nostro asserto.

Dalla proposizione dimostrata scende facilmente il noto teorema di Rolle. Essa si può estendere alle funzioni trascendenti intiere, come mostrerò in un prossimo lavoro.

Chimica. — *Sugli stannati* [1]. Nota di I. Bellucci e N. Parravano, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Sale di piombo $[Sn(OH)^6]Pb$

È un precipitato bianco, amorfo, che si ottiene aggiungendo, a temperatura ordinaria, ad una soluzione di stannato di potassio una soluzione di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.