ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 6 novembre 1904.

Matematica. — *Sopra le equazioni differenziali relative a certi covarianti di forme algebriche (estensione di alcune ricerche di Brioschi e Betti).* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Un invariante o covariante di una o di più forme binarie, considerato come dipendente dalle *radici* delle equazioni che si ottengono eguagliando a zero le forme stesse, soddisfa, come è noto, a certe equazioni differenziali che furono per la prima volta trovate da Brioschi (*Ann. di scienze matem. e fisiche*, t. V, 1854, pag. 207; *Op. matem.*, t. I, pag. 111; v. anche pag. 375). Poco più tardi il Betti (*Ann. di Matem.* (1), t. I, pag. 344; *Op. matem.*, t. I, pag. 178) in una breve Nota intitolata: *Sopra i combinanti*, che a prima vista potrebbe sembrare d'avere uno scopo alquanto diverso, riuscì in sostanza a presentare una notevole estensione delle equazioni che Brioschi avea trovato alcuni anni prima.

Il Betti considerò un sistema di $p-1$ forme di specie p (a p variabili omogenee) e *del medesimo ordine*, e avendo trovato che i loro *combinanti* divisi per una certa funzione dei coefficienti, si poteano considerare come dipendenti dai sistemi di soluzioni comuni alle $p-1$ equazioni ottenute eguagliando a zero le date forme, ricercò a quali equazioni differenziali doveano soddisfare i combinanti considerati come funzioni dei suddetti sistemi di soluzioni.

Ora è interessante osservare che le equazioni trovate da Betti hanno una portata assai maggiore di quanto egli non dicesse, e valgono non solo pei combinanti, ma per tutti quei covarianti, di un sistema di $p-1$ forme *di ordini anche fra loro diversi*, che soddisfanno ad una certa proprietà di cui diremo più sotto, e che inoltre, oltre le equazioni di Betti, ne esistono delle altre, intimamente ad esse congiunte.

A ciò è dedicata la presente Nota, della quale mi sembra anche non privo di interesse il metodo seguito. In un' altra Nota farò poi vedere che il sistema di tutte le equazioni qui ottenute gode di una importante proprietà generale, che deriva in modo naturale dal metodo stesso della nostra dimostrazione, e che ha la stessa origine e natura di quella cui soddisfa l' ordinario e noto sistema di equazioni differenziali per un covariante qualunque.

1. Sieno date $p-1$ forme a p variabili omogenee di ordini $n_1, n_2, \ldots n_{p-1}$:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = a_x^{n_1} = \sum\limits_r \dfrac{n_1!}{r_1!\ldots r_p!} a_{r_1\ldots r_p} x_1^{r_1}\ldots x_p^{r_p} \quad , \quad \left(\sum\limits_h r_h = n_1\right) \\ f_2 = b_x^{n_2} = \sum\limits_r \dfrac{n_2!}{r_1!\ldots r_p!} b_{r_1\ldots r_p} x_1^{r_1}\ldots x_p^{r_p} \quad , \quad \left(\sum\limits_h r_h = n_2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

e ponendo

$$(2)\qquad \frac{x_i}{x_p} = z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p-1)$$

indichiamo con

$$(3)\qquad z_{i1}, z_{i2}, \ldots z_{iN} \qquad (N = n_1 n_2 \ldots n_{p-1})$$

gli N sistemi di soluzioni comuni alle equazioni $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_{p-1} = 0$.

Indichiamo con P un *invariante* qualunque del sistema delle $p-1$ forme, che indicheremo con $\varphi_1, \ldots \varphi_{p-1}$, ottenute dalle f ponendovi $x_p = 0$, e sia $P^{(h)}$ il risultato ottenuto da P colla formola:

$$(4)\qquad P^{(h)} = \sum_a \sum_r r_h\, a_{r_1\ldots r_h-1,\ldots r_{p-1},1} \frac{\partial P}{\partial a_{r_1\ldots r_{p-1}0}}$$

in cui $\sum\limits_a$ sta a significare che bisogna sommare tutti i risultati che si ottengono considerando prima i coefficienti a della prima forma, poi i coefficienti b della seconda, e così di seguito.

2. Consideriamo una trasformazione lineare delle variabili x:

$$(5)\qquad x_i = \sum_{h=1}^{p} \alpha_i^{(h)} x'_h$$

e sia

$$\Delta = |\alpha_i^{(h)}| \quad , \quad (h\,, i = 1\,, 2\,, \ldots p)$$

il determinante della trasformazione.

Le forme fondamentali $a_x^{n_1}, b_x^{n_2}, \ldots$ diventino $a'_{x'}{}^{n_1}, b'_{x'}{}^{n_2}, \ldots$ e i coefficienti simbolici trasformati $a', b', \ldots$ si esprimeranno mediante gli antichi colle formole

$$(6) \qquad \begin{cases} a'_i = a_1\,\alpha_1^{(i)} + \cdots\cdots + a_p\,\alpha_p^{(i)} = a_{\alpha^{(i)}} \\ b'_i = b_1\,\alpha_1^{(i)} + \cdots\cdots + b_p\,\alpha_p^{(i)} = b_{\alpha^{(i)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dalle (5) otteniamo

$$(7) \qquad x'_h = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{p} A_i^{(h)}\, x_i$$

indicando con $A_i^{(h)}$ i complementi algebrici degli elementi $\alpha_i^{(h)}$ nel determinante Δ; e se poniamo:

$$\frac{x_i}{x_p} = z_i \quad , \quad \frac{x'_i}{x'_p} = z'_i$$

e, come sopra (v. formole (3)), indichiamo con $z_{ij}\,(i = 1\,, \ldots p - 1)$ i valori dell' j^{mo} sistema di soluzioni comuni alle equazioni ottenute eguagliando a zero le $p - 1$ forme date, e con z'_{hj} i valori del sistema trasformato, abbiamo le formole:

$$(8) \qquad z'_{hj} = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(h)}\, z_{ij} + A_p^{(h)}}{\sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(p)}\, z_{ij} + A_p^{(p)}}$$

in cui:

$$h = 1\,, 2\,, \ldots\ldots p - 1$$
$$j = 1\,, 2\,, \ldots\ldots \mathrm{N} \qquad , \mathrm{N} = n_1\, n_2 \ldots n_{p-1}$$

3. Immaginiamo ora *un covariante* J *del sistema delle* $p - 1$ *forme* f, *che abbia la proprietà che, diviso per una opportuna potenza* λ *di un qualunque invariante* P, *delle* $p - 1$ *forme* φ *ottenute dalle* f *ponendovi* $x_p = 0$, *risulti una funzione degli* N *sistemi di soluzioni* (3).

Se gli ordini delle $p - 1$ forme sono tutti eguali, e P è p. es. il risultante delle φ, un *combinante* soddisfa appunto a questa condizione, e si ha

il caso considerato da Betti. Se $p = 2$, si ha il caso delle forme binarie, P diventa il primo coefficiente a_0 della binaria assegnata, e *ogni* covariante soddisfa evidentemente alla proprietà indicata; si ha il caso considerato da Brioschi.

Poniamo

$$\frac{J}{P^\lambda} = I; \tag{9}$$

per l'ipotesi, I dipenderà solo dalle radici (3), e dalle x, onde

$$J = P^\lambda . I \tag{10}$$

sarà funzione delle radici (3), di P, e delle x; sia di ordine m in queste.

Il covariante J scritto nelle variabili x' e nei coefficienti a', b', ... sia indicato con J'; sarà:

$$J' = \Delta^q J . \tag{11}$$

Immaginiamo inoltre P scritto nei coefficienti a', b', ... e indi sostituiti a tali coefficienti i loro valori (6); si avrà una certa espressione intera nelle a, b, ... e nelle α, e che noi indicheremo con $P_{(\alpha)}$. Indicando con I' la I scritta nelle variabili e nei coefficienti trasformati, si ha, per (11):

$$I' = \frac{\Delta^q}{\left(\frac{P_{(\alpha)}}{P}\right)^\lambda} . I . \tag{12}$$

Ora cercheremo di costruire una trasformazione delle quantità da cui J dipende, cioè delle radici (3), delle x, e di P, *diversa* da quella che risulterebbe dalle (6), (7), (8) e per la quale J si comporti come un *covariante assoluto*.

Propriamente lasciamo inalterate le (8), in luogo delle (7) poniamo:

$$x''_h = \Delta^{\frac{1}{p}} x'_h = \Delta^{\frac{1}{p}-1} \sum_{i=1}^{p} A_i^{(h)} x_i \tag{13}$$

e assoggettiamo infine la quantità P alla trasformazione:

$$P'' = \left(\frac{P_{(\alpha)}}{P}\right) \Delta^{-\frac{1}{\lambda}\left(q+\frac{m}{p}\right)} . P \tag{14}$$

La J *scritta nelle* z', *nelle* x'', *e nella* P'' *è eguale alla* J, *cioè la* J *resta, rispetto alla trasformazione* (8), (13), (14), *invariata in senso assoluto.*

Infatti poichè I *non* dipende da P, la trasformazione (14) non influisce affatto sul mutamento che subisce la I, e poichè I è omogenea di ordine m nelle x, e poichè, se in luogo delle x'' si introducessero le x', la I subirebbe il cangiamento indicato dalla (12), diventerebbe cioè la I′ data dalla (12), così, indicando con I″ ciò che diventa la I scritta nelle x'', si ha evidentemente:

$$I'' = \Delta^{\frac{m}{p}} I'$$

cioè;

$$I'' = \frac{\Delta^{q+\frac{m}{p}}}{\left(\frac{P_{(\alpha)}}{P}\right)^{\lambda}} \cdot I \tag{15}$$

Perciò, indicando con J″ la J scritta nelle z' (date dalle (8)), nelle x'' (date dalle (13)), e nella P″ (data dalla (14)) si ha, secondo l'assunto:

$$J'' = P''^{\lambda} \cdot I'' = P^{\lambda} I = J \,. \tag{16}$$

I parametri della trasformazione qui operata sono naturalmente le α, e si ha la trasformazione identica quando:

$$\begin{cases} \alpha_k^{(h)} = 0 \quad , \quad h \neq k \,, \\ \alpha_h^{(h)} = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Le equazioni differenziali cui soddisferà la J corrisponderanno alle varie trasformazioni infinitesime ottenute facendo variare uno dei parametri, di quantità infinitesime sui valori iniziali (17). Propriamente la J soddisferà ad equazioni del tipo:

$$\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} Z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} + \sum_{s=1}^{p} X_s \frac{\partial J}{\partial x_s} + \Pi \frac{\partial J}{\partial P} = 0 \tag{18}$$

in cui le Z, X, Π sono i risultati ottenuti formando le derivate di z', x'', P″ rispetto ad uno dei parametri α e indi ponendo per questi i valori (17); si hanno così tante equazioni differenziali per quanti parametri α, cioè in tutto p^2.

Calcoliamo ora le dette derivate. Racchiudendo in parentesi, e con un indice 0 in basso, le derivate quando in esse si sono sostituiti i valori (17),

si hanno in primo luogo le formole ausiliarie:

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_k^{(h)}}\right)_0 = 0\,, \quad \text{per } h \neq k$$
$$= 1\,, \quad \text{per } h = k$$

$$\left(\frac{\partial A_s^{(t)}}{\partial \alpha_k^{(h)}}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_k^{(h)}\, \partial \alpha_s^{(t)}}\right)_0 = 1\,, \quad \text{per } h = k\,, t = s\,, k \neq s$$
$$= -1\,, \text{per } h = s\,, t = k\,, k \neq s\,,$$
$$= 0 \quad \text{in ogni altro caso,}$$

e indi, mediante queste, le altre:

$$(19) \quad \begin{cases} Z'_{ij} = \left(\dfrac{\partial s'_{ij}}{\partial \alpha_k^{(h)}}\right)_0 = 0 & \text{per } k \neq i\,, k < p \\ \qquad\qquad = -1 & \text{per } k = i\,, h = p \\ \qquad\qquad = -z_{hj} & \text{per } k = i\,, h < p \\ \qquad\qquad = z_{hj}\, z_{ij} & \text{per } h \neq k\,, k = p \\ \qquad\qquad = z_{ij} & \text{per } h = k = p \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} X_s = \left(\dfrac{\partial x''_s}{\partial \alpha_k^{(h)}}\right)_0 = 0 & \text{per } h \neq k\,,\ k \neq s \\ \qquad\qquad = -x_h & \text{per } h \neq k\,,\ k = s \\ \qquad\qquad = \dfrac{1}{p}\, x_s & \text{per } h = k \neq s \\ \qquad\qquad = \left(\dfrac{1}{p} - 1\right) x_s & \text{per } h = k = s \end{cases}$$

Per calcolare ora le derivate di P'' basta cercare quelle di $P_{(\alpha)}$, la quale non è altro che P quando in luogo dei coefficienti simbolici $a_1\, a_2 \ldots b_1\,, b_2 \ldots$ si pongono rispettivamente $a_{\alpha^{(1)}}\,, a_{\alpha^{(2)}}\,, \ldots b_{\alpha^{(1)}}\,, b_{\alpha^{(2)}}\,, \ldots$ Se in P_0 c' è il coefficiente effettivo:

$$(21) \qquad a_{r_1 \ldots r_{p-1} 0} = a_1^{r_1} \ldots a_{p-1}^{r_{p-1}} \quad , \quad \sum r = n_1$$

in $P_{(\alpha)}$ ci sarà in corrispondenza la formazione simbolica:

$$(22) \qquad a_{\alpha^{(1)}}^{r_1} \ldots a_{\alpha^{(p-1)}}^{r_{p-1}}$$

la quale ridiventa la precedente, quando per le α si pongono i valori iniziali (17). La derivata di (22) rispetto a $\alpha_k^{(h)}$ è:

$$r_h\, a_k . a_{\alpha^{(1)}}^{r_1} \ldots a_{\alpha^{(h)}}^{r_h - 1} \ldots a_{\alpha^{(p-1)}}^{r_{p-1}}$$

che pei valori (17) diventa:

$$(23)\quad \begin{cases} r_h\, a_1^{r_1} \dots a_h^{r_h-1} \dots a_k^{r_k+1} \dots a_{p-1}^{r_{p-1}} \;, & \text{se } h \neq k \\ r_h\, a_1^{r_1} \dots a_h^{r_h} \dots a_k^{r_k} \dots a_{p-1}^{r_{p-1}} \;, & \text{se } h = k \end{cases}$$

Si vede di qui che il valore della derivata di $P_{(\alpha)}$ si ottiene facendo la somma delle derivate di P rispetto a ciascun coefficiente effettivo come (21), che esso contiene, e indi moltiplicando il risultato per (23). Ora si riconosce che, se è $k < p$, l'operazione che così viene a farsi non è altro che quella rappresentata dal primo membro di una delle note equazioni differenziali cui soddisfa un invariante qualunque delle forme date ridotte a contenere solo $p-1$ variabili omogenee, cioè nelle quali si sia messo $x_p = 0$. Ma P è appunto un invariante delle forme così ridotte, onde si vede che se è $k < p$, il valore della cercata derivata è zero, se $h \neq k$, ed è eguale ad ω P, in cui ω è il *peso* dell'invariante P, se $h = k$. Se poi è $k = p$, l'esponente r_k non potrà che essere zero, perchè P non contiene mai il simbolo a_p, e, per effetto della formola (4), il risultato sarà $P^{(h)}$, se $h < p$, e sarà evidentemente zero se $h = p$, perchè $P_{(\alpha)}$ non contiene $\alpha^{(p)}$. Tenendo conto della (14) e delle derivate di Δ, si ha perciò:

$$(24)\quad \begin{cases} \Pi = \left(\dfrac{\partial P}{\partial \alpha_k^{(h)}}\right) = 0 & \text{per } k < p \;,\; h \neq k \\ \quad = P^{(h)} & \text{per } k = p \;,\; h \neq k \\ \quad = \left[-\dfrac{1}{\lambda}\left(q + \dfrac{m}{p}\right) + \omega\right] P & \text{per } h = k < p \\ \quad = -\dfrac{1}{\lambda}\left(q + \dfrac{m}{p}\right) P & \text{per } h = k = p \end{cases}$$

Sostituendo in (18) i valori trovati (19), (20), (24), e osservando che per (10) è $P_0 \dfrac{\partial J}{\partial P_0} = \lambda J$ e che è: $\sum x_s \dfrac{\partial J}{\partial x_s} = m\, J$, si hanno infine le equazioni differenziali:

$$(25)\quad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} + x_p \frac{\partial J}{\partial x_i} = 0 \;,\quad (i = 1, 2, \dots p-1)$$

$$(26)\quad \sum_{j=1}^{N} z_{hj} \frac{\partial J}{\partial z} + x_h \frac{\partial J}{\partial x_i} = 0 \;,\quad (h \neq i \;;\; h, i = 1, 2, \dots p-1)$$

$$(27)\quad \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} z_{hj}\, z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} - x_h \frac{\partial J}{\partial x_p} = - P^{(h)} \frac{\partial J}{\partial P} \;,\quad (h = 1, 2, \dots p-1)$$

$$(28) \qquad \sum_{j=1}^{N} z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} + x_i \frac{\partial J}{\partial x_i} = (\lambda\omega - q)J \qquad (i = 1, 2, \dots p-1)$$

$$(29) \qquad \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{N} z_{ij} \frac{\partial J}{\partial z_{ij}} - x_p \frac{\partial J}{\partial x_p} = q\, J$$

di cui *le prime tre*, quando si assuma per P il risultante delle φ, sono precisamente le equazioni ottenute da Betti pei combinanti [1], salvo il cangiamento di notazione.

Come si vede noi veniamo così a trovare che *le stesse equazioni valgono per una classe assai più vasta di covarianti e propriamente per tutti quelli di cui si parla al principio del § 3.*

Si può esaminare che significato ha $P^{(h)}$ quando P è, come nel caso di Betti, il risultante delle φ.

Fra le $f_1 = 0 \dots f_{p-1} = 0$ eliminando $x_1 \dots x_{h-1}\, x_{h+1} \dots x_{p-1}$ si ponga il risultato sotto la forma

$$(30) \qquad P\, x_h^N + P^{(h)}\, x_h^{N-1}\, x_p + \cdots = 0$$

in cui è chiaro che il primo coefficiente P è il risultante delle f per $x_p = 0$, cioè delle φ.

Si può mostrare che il secondo coefficiente $P^{(h)}$ di (30) è esattamente ciò che risulta da (4). Giacchè è evidente che, se nell' espressione simbolica di P (risultante delle φ), in luogo di $a_h, b_h, \dots$, poniamo

$$\alpha_h \equiv a_h + a_p \frac{x_p}{x_h}$$

$$\beta_h \equiv b_h + b_p \frac{x_p}{x_h}$$

si deve ottenere il primo membro di (30) diviso per x_h^N. Ora il mutamento indicato corrisponde a porre in P, consecutivamente, in luogo di ciascun coefficiente $a_1^{r_1} \dots a_{p-1}^{r_{p-1}} \equiv a_{r_1 \dots r_{p-1} 0}$ la espressione:

$$a_1^{r_1} \dots \left(a_h + a_p \frac{x_p}{x_h}\right)^{r_h} \dots a_{p-1}^{r_{p-1}} \equiv a_{r_1 \dots r_{p-1} 0} + r_h\, a_{r_1 \dots r_h - 1, \dots r_{p-1}, 1} \frac{x_p}{x_h} + \cdots$$

[1] *Opere Matem.* t. I, pag. 181. È bene avvertire che in Betti è incorso un evidente errore di stampa, riprodotto anche a pag. 181 delle *Opere Matem.* Il primo termine dell' equazione che in Betti porta il numero (9) deve essere moltiplicato per y_0.

e similmente per i coefficienti $b, \ldots$ Ciò mostra che $P^{(h)}$ di (30) si ottiene appunto colla formola (4).

Se P è il risultante delle φ, *il suo peso* ω *è eguale ad* N, come risulta facilmente dalla nota formola che lega i gradi e il peso di un invariante.

4. Se nella (28) facciamo variare i da 1 a $p-1$, sommiamo i risultati e indi sottragghiamo la somma da (29), otteniamo

$$-m = pq - \lambda(p-1)\omega$$

e indicando con $k_1 \ldots k_{p-1}$ i gradi di J nei coefficienti di $f_1 \ldots f_{p-1}$ e ricordando che

$$q = \frac{\sum_{s=1}^{p-1} n_s k_s - m}{p}$$

si ha la formola:

$$\lambda = \frac{pq + m}{(p-1)\omega} = \frac{\sum_{s=1}^{p-1} n_s k_s}{(p-1)\omega} \tag{31}$$

che determina l'esponente λ di cui si parla nell'ipotesi fatta sul principio del § 3.

Il sistema delle equazioni (25)...(29) soddisfa, come abbiamo annunziato, ad una proprietà interessante; ma di ciò, insieme ad altre cose, tratteremo in una prossima comunicazione.

Chimica. — *Studî sulla racemia* [1]. Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota precedente [2] fu svolta la teoria generale dei fenomeni crioidratici nelle miscele di isomeri ottici e vennero esposti i risultati di alcune ricerche eseguite intorno a questo soggetto assieme a F. Finzi. Due fra le serie di esperienze comunicate si riferivano a soluzioni degli eteri dimetilici degli acidi diacetiltartrico e diacetilracemico in bromuro d'etilene ed in p.xilolo. Dissi allora che mi riservavo di mostrare come dalla forma della superficie di congelamento e dall'andamento delle relative isoterme (loc. cit., figg. 2 e 3) si potessero trarre conclusioni intorno allo stato molecolare dei corpi disciolti e cioè all'esistenza o meno di molecole racemiche in soluzione.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

[2] Questi Rendiconti, 1904, II, 349..