ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Meccanica. — *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente G. MORERA.

Nel § 43 della *Théorie de l'Elasticité des corps solides* (¹) il Clebsch si occupa della determinazione dello stato d'equilibrio di una piastra cilindrica, di grossezza finita, sulla cui superficie laterale agiscono delle forze, parallele alle basi, disposte simmetricamente (per ogni generatrice) rispetto alla sezione media della piastra, in modo che esse non tendano a produrre che estensioni o contrazioni, senza alcuna torsione o flessione.

La risoluzione di tale problema dipende dalla conoscenza di due certe funzioni φ, ψ, che il Clebsch determina (op. cit. § 44), nel solo caso di una piastra circolare, ricorrendo a sviluppi in serie, il che conduce a calcoli assai complicati.

In questa Nota, trasformo dapprima opportunamente le equazioni indefinite a cui soddisfanno le funzioni φ, ψ (§ 1), poi introducendo certe tre funzioni ausiliarie T_{11}, T_{12}, T_{22}, si trova che queste (limitatamente a due dimensioni) debbono soddisfare ad equazioni indefinite della stessa forma di quelle a cui soddisfanno le tre tensioni $T_{11}, T_{12}, \ldots T_{33}$ nel caso di un corpo continuo, a tre dimensioni, e in equilibrio. In queste condizioni si possono allora applicare le eleganti formole stabilite dal prof. Morera per la soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo, e si riconosce con ciò che le tre funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22} anzidette possono sempre esprimersi mediante le derivate parziali seconde di una stessa funzione biarmonica; in tal caso le equazioni ai limiti acquistano (§ 2) una forma semplicissima, inquantochè, in ultima analisi, vengono ad esprimere che le derivate parziali, rispetto ad x e ad y di una certa funzione biarmonica debbono assumere, sul contorno, dei valori assegnati; e così la determinazione delle funzioni φ, ψ è ridotta alla questione, ormai classica, della ricerca della funzione biarmonica in un'area piana, nel caso in cui, sul contorno, si conoscono i valori assunti dalla funzione e dalla sua derivata normale: questione che si sa risolvere per un grandissimo numero di aree. Da questa funzione biarmonica si ottengono poi agevolmente (§ 3) le funzioni richieste φ, ψ.

Nella questione dianzi esposta, rientra pure quella relativa alla determinazione degli spostamenti longitudinali di una piastra isotropa piana, infinitamente sottile, assoggettata, sul contorno, a tensioni date, agenti nel piano

(¹) Traduzione francese di Saint-Venant et Flamant (Paris, a. 1883).

della piastra (§ 4), poichè le equazioni indefinite dell' equilibrio sono le stesse di quelle del problema precedente, mentre invece le equazioni ai limiti ne sono un caso particolare.

Per ultimo faccio vedere (§ 5) come un' altra questione sulle piastre cilindriche trattata dal Clebsch (op. cit., § 41), e da lui risolta nel solo caso di una piastra circolare, mediante sviluppi in serie (id. § 42), si possa subito ricondurre al problema di Dirichlet.

1. Sia σ la sezione retta della piastra cilindrica che si considera, e diciamo s il contorno di σ.

Le funzioni φ, ψ (di cui sopra), devono soddisfare, nei punti di σ, alle alle equazioni indefinite [op. cit., § 43, eq. (154)]:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{1-\varkappa}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1+\varkappa}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}=0\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1-\varkappa}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1+\varkappa}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,\end{aligned}\right.$$

e nei punti di s alle equazioni ai limiti [id., eq. (154)]:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varkappa\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+a\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\,\partial y}\right)\right]\frac{dx}{dn}+\\ &\qquad+\left[\frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+a\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right]\frac{dy}{dn}=\Phi,\\ &\left[\frac{1-\varkappa}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+a\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right]\frac{dx}{dn}+\\ &\qquad+\left[\left(\varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+a\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)\right]\frac{dy}{dn}=\Psi,\end{aligned}\right.$$

ove $\varkappa$ è una costante dipendente dalla natura della piastra, n è la normale interna, $a=\frac{kh^2}{4}$, h essendo la grossezza della piastra (cioè la distanza delle sue due basi), e Φ, Ψ sono funzioni conosciute in ogni punto di s, e che soddisfanno alle equazioni [id., § 44, pag. 329)]:

$$(3)\qquad \int_s \Phi\,ds=0\quad,\quad \int_s \Psi\,ds=0\quad,\quad \int_s (y\Phi-x\Psi)\,ds=0,$$

le quali esprimono, in sostanza, che le forze esterne, agenti sulla piastra, si fanno equilibrio.

Le (1) possono ancora scriversi:

$$
(4)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\varkappa\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\dfrac{1-\varkappa}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\dfrac{1-\varkappa}{2}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)=0\,,
\end{cases}
$$

perciò introducendo le tre funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22} definite dalle formole:

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
T_{11}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\varkappa\,\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2ex]
T_{12}=\dfrac{1-\varkappa}{2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\\[2ex]
T_{22}=\varkappa\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}
\end{cases}
$$

avremo dalle (4):

$$
(6)\qquad \frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}=0\quad,\quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}=0\,;
$$

ponendo poi:

$$
(7)\qquad T=T_{11}+T_{22}\,,
$$

segue subito dalle (5):

$$
(8)\qquad T=(1+\varkappa)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right);
$$

ora dalle (1) derivando rispetto ad x e ad y e poi sommando, risulta che il secondo membro della (8) è funzione armonica, perciò:

$$
(9)\qquad \Delta_2 T=0\quad,\quad\left(\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).
$$

Ciò posto, possiamo ottenere delle espressioni assai semplici per le funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22} applicando la proprietà seguente:

La soluzione più generale delle equazioni (6) *è data dalle formole* [1]:

$$
(10)\qquad T_{11}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\quad,\quad T_{12}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\quad,\quad T_{22}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,,
$$

ove $U(x\,,y)$ è una funzione arbitraria.

Poichè dalle (10), (7) si ha:

$$
(11)\qquad T=\Delta_2 U\,,
$$

ricordando la (9) si conclude che *la funzione* U *deve essere biarmonica.*

[1] Queste formole sono un caso particolare di quelle stabilite dal prof. Morera nella sua Nota: *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo* (Rendiconti di questa R. Accademia, vol. I, 1° sem. 1892, pag. 234).

Si tratta ora di determinare la funzione biarmonica U. Vediamo perciò a quali equazioni ai limiti essa soddisfa.

2. Le equazioni ai limiti (2) introducendo le (5), (8) possono scriversi:

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\mathrm{T}_{11}+b\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial x^2}\right)\frac{dx}{dn}+\left(\mathrm{T}_{12}+b\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{dy}{dn}=\Phi\\&\left(\mathrm{T}_{12}+b\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial y\,\partial x}\right)\frac{dx}{dn}+\left(\mathrm{T}_{22}+b\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial y^2}\right)\frac{dy}{dn}=\Psi,\end{aligned}\right.\qquad\left(b=\frac{a}{1+\varkappa}\right)$$

e adoperando le (10) e la (9):

$$(2')\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2(\mathrm{U}-b\mathrm{T})}{\partial y^2}\frac{dx}{dn}-\frac{\partial^2(\mathrm{U}-b\mathrm{T})}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dn}=\Phi\\&-\frac{\partial^2(\mathrm{U}-b\mathrm{T})}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial^2(\mathrm{U}-b\mathrm{T})}{\partial x^2}\frac{dy}{dn}=\Psi.\end{aligned}\right.$$

Se ora si pone:

$$(12)\qquad \mathrm{V}=\mathrm{U}-b\mathrm{T},$$

la V sarà, come la U, biarmonica; attribuendo poi al contorno s di σ un verso positivo individuato dalle formole:

$$(13)\qquad \frac{dx}{ds}=-\frac{dy}{dn}\;,\quad \frac{dy}{ds}=\frac{dx}{dn}\,,$$

le equazioni (2′) potranno scriversi:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\right)\frac{dx}{ds}=\Phi\\&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\right)\frac{dy}{ds}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds}=-\Psi,\end{aligned}\right.$$

cioè

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\right)=\Phi\;,\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\right)=-\Psi;$$

è lecito evidentemente aggiungere la condizione che in un punto P_0 del contorno sia:

$$(14)\qquad \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}=0\;,\quad \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}=0\,,$$

e allora integrando avremo, in un altro punto qualunque P di s:

$$(15)\qquad \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}=\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\Phi\,ds=\mathrm{G}\;,\quad \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}=-\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\Psi\,ds=\mathrm{F}\,,$$

ove F, G indicano funzioni completamente conosciute dell'arco s. Dalle prime due delle (3) risulta poi che ritornando nel punto P_0 dopo aver percorso l'intero contorno s, si ritroveranno per $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ i valori (14), cioè queste funzioni assumeranno un solo valore in ogni punto di s.

Si può ancora porre la condizione che nel punto P_0 debba essere $V = 0$, allora il valore della funzione V, in un punto qualunque P′ di s, sarà dato dalla formola:

$$V = \int_{P_0}^{P'} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right),$$

cioè, per le (15):

$$V = \int_{P_0}^{P'} (F\,dx + G\,dy). \tag{15$_1$}$$

Affinchè, al solito, ritornando nel punto P_0 dopo aver percorso l'intero contorno, si ritrovi per V il valore 0, dovrà essere:

$$\int_s (F\,dx + G\,dy) = 0,$$

ossia, integrando per parti:

$$\int_s \left(x \frac{dF}{ds} + y \frac{dG}{ds} \right) ds = 0,$$

e questa condizione è verificata, perchè adoperando le (15) essa si riduce all'ultima delle (3).

Dalle (15) si ha poi evidentemente:

$$\frac{dV}{dn} = F \frac{dx}{dn} + G \frac{dy}{dn}. \tag{16}$$

Le (15$_1$), (16) forniscono quindi, per ogni punto di s, il valore della funzione V e della sua derivata normale, e poichè la V, come si vide, è biarmonica, essa risulta da queste condizioni perfettamente determinata in tutta l'area σ. La funzione V si sa effettivamente costruire per molte classi di aree [1]; nel caso poi in cui l'area data è un cerchio [2], o si può rappresentare conformemente su un cerchio con polinomi interi [3], o più

(1) Levi-Civita, *Sull'integrazione dell'equazione*, $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$ (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 33, a. 1898).

(2) Lauricella, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare* (id., vol. 31, a. 1896).

(3) Almansi, *Integrazione della doppia equazione di Laplace* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. IX, 1° sem., 1900).

generalmente con funzioni razionali [1], essa risulta espressa con integrali definiti.

Ritenendo quindi conosciuta la V, avremo dalla (12) ricordando le (11), (9):

$$T = \Delta_2 V;$$

la funzione T è così già conosciuta, e per conseguenza la (12) ci darà la funzione U. Dopo ciò le (10) forniscono senz'altro le funzioni T_{11}, T_{12}, T_{22}.

3. Vediamo ora come si possano ottenere le funzioni φ, ψ. Si può intanto osservare che dalle (5) si ha:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 - \varkappa^2} (T_{11} - \varkappa T_{22}) \; ; \tag{17}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{1 - \varkappa^2} (T_{22} - \varkappa T_{11}) \, . \tag{18}$$

D'altra parte ponendo:

$$T' = (1 + \varkappa) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

e ricordando la (8) si ha facilmente dalle (4):

$$\frac{2}{-} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{2}{1 - \varkappa} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial T'}{\partial x} = 0 \, ,$$

le quali mostrano che si può porre:

$$T' = \frac{2}{1 - \varkappa} T_0 - 2\omega (1 + \varkappa) \, ;$$

ove T_0 è la funzione armonica coniugata di T (e quindi sarà pure conosciuta) ed ω è una costante arbitraria; si ha quindi la nuova equazione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{2}{1 - \varkappa^2} T_0 - 2\omega \, .$$

Da questa e dalla seconda delle (5) si ha subito:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 - \varkappa^2} [(1 + \varkappa) T_{12} + T_0] - \omega \tag{19}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{1 - \varkappa^2} [(1 + \varkappa) T_{12} - T_0] + \omega \, . \tag{20}$$

[1] Boggio, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane* (Atti del R. Istituto Veneto, t. LXI, parte 2ª, a. 1902).

Dalle equazioni (17), (19) dobbiamo ora ricavare la funzione φ. Osserviamo perciò che i secondi membri di esse sono effettivamente le derivate rispetto ad x e ad y di una stessa funzione; infatti si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y}(T_{11} - \varkappa T_{22}) = \frac{\partial}{\partial x}[(1+\varkappa) T_{12} + T_0],$$

perchè quest'equazione può scriversi:

$$\frac{\partial}{\partial y}(T - T_{22} - \varkappa T_{22}) = (1+\varkappa)\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y},$$

la quale è identica in virtù delle (6). Da tali equazioni si può pertanto ricavare la φ e si avrà un risultato della forma:

(21) $$\varphi = W_1 - \omega y + c_1,$$

W_1 essendo una funzione nota di x, y, e c_1 una costante arbitraria.

Similmente si riconosce che i secondi membri delle (20), (18) sono le derivate rispetto ad x e ad y di una stessa funzione, perciò da tali equazioni si ricaverà per ψ un'espressione della forma:

(22) $$\psi = W_2 + \omega x + c_2,$$

ove W_2 è una funzione nota di x, y, e c_2 una costante arbitraria.

Le formole (21), (22) *risolvono perciò la questione proposta.*

4. Consideriamo ora una piastra elastica, isotropa, piana, infinitamente sottile, non soggetta a forze di massa, il cui contorno sia sollecitato da forze date, agenti nel piano della piastra, e di cui denoteremo con Φ, Ψ le componenti (le quali dovranno soddisfare alle equazioni (3)).

Se φ, ψ indicano le componenti dello spostamento di un punto qualunque della piastra, queste funzioni devono, come è noto [1], soddisfare, in ogni punto della piastra, alle equazioni indefinite (4) e nei punti del contorno alle equazioni che si ottengono dalle (2) ponendovi $a = 0$ e leggendo nel secondo membro $\alpha\Phi, \alpha\Psi$, ove α è una costante.

Si conclude pertanto che il problema di determinare gli spostamenti φ, ψ è un caso particolare di quello trattato nei §§ precedenti, e perciò si può risolvere col procedimento ivi esposto.

Questo problema è pure stato trattato dal Clebsch (op. cit., § 74) nel caso di un'area circolare, adoperando sviluppi in serie.

[1] Oltre ai trattati classici di Clebsch, Mathieu, Voigt, Love, ecc., cfr. pure Marcolongo, *Teoria matematica della elasticità*, parte 2ª, pag. 66 (Lezioni litografate, Messina, a. 1903); Hadamard, *La théorie des plaques élastiques planes*, § VI (Transactions of the American mathematical Society, vol. 3°, a. 1902).

5. Nell'opera già citata il Clebsch si occupa (§ 41) di un'altra questione relativa alla deformazione dei cilindri, la quale si riduce alla determinazione di due funzioni u, v che, nei punti di una sezione retta σ del cilindro, verificano le equazioni indefinite:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{23}$$

e nei punti del contorno s di σ soddisfanno all'equazione ai limiti:

$$u\frac{dx}{dn}+v\frac{dy}{dn}=\Phi, \tag{24}$$

Φ essendo una funzione (nota) che ha per espressione:

$$\Phi=\mathrm{N}-\frac{1}{2\mathrm{A}}\left(x\frac{dx}{dn}+y\frac{dy}{dn}\right)\int_s \mathrm{N}\,ds \text{ (}^1\text{)}, \tag{25}$$

ove N è una funzione data nei punti di s, ed A è l'area di σ.

La determinazione delle funzioni u, v è stata fatta dal Clebsch nel solo caso di un'area circolare (op. cit., § 42) e con sviluppi in serie; è però facile mostrare come tali funzioni possano ottenersi agevolmente risolvendo il problema di Dirichlet per l'area σ.

Intanto dalle (23) risulta notoriamente che si può porre:

$$u=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} \quad , \quad v=-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \tag{26}$$

ove U è una funzione armonica di x, y; la (24) diventa allora, ricordando anche le (13):

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\Phi,$$

cioè:

$$\frac{d\mathrm{U}}{ds}=\Phi;$$

si può porre la condizione che in punto qualunque P_0 di s sia $\mathrm{U}=0$, allora avremo in un altro punto qualunque P del contorno:

$$\mathrm{U}=\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\Phi\,ds, \tag{27}$$

e questa funzione assumerà effettivamente un sol valore in ogni punto di s, se è soddisfatta la condizione

$$\int_s \Phi\,ds=0; \tag{28}$$

(1) Clebsch, op. cit., § 41, eq. (147) bis.

ora ponendo, per brevità, $C = \int_s N\,ds$, si ha dalla (25):

$$\int_s \Phi\, ds = C - \frac{C}{2A}\left(\int_s x \frac{dx}{dn} ds + \int_s y \frac{dy}{dn} ds\right),$$

e trasformando gli $\int_s$ del secondo membro in $\int_\sigma$ si trova che ciascuno di essi vale A, perciò il secondo membro è 0, cioè è verificata la (28).

La questione proposta è quindi ridotta alla determinazione della funzione U, armonica in σ, e che sul contorno s assume i valori dati dalla (27), e ciò costituisce appunto il problema di Dirichlet per l'area σ.

Ottenuta la funzione U, le (26) ci faranno conoscere le funzioni u, v che risolvono il problema considerato.

Aeronautica. — *Sulla stabilità dei dirigibili.* Nota di G. A. Crocco, presentata dal Socio P. Blaserna.

Il colonnello Renard presentava tempo fa all'Accademia delle Scienze di Parigi [1] una Nota sulla stabilità dei dirigibili nella quale riferiva di alcuni suoi esperimenti su modelli di palloni fusiformi trattenuti per un asse baricentrico fisso ed esposti innanzi alla corrente d'aria costante di un ventilatore. L'eminente aeronauta era per essi condotto a riconoscere nel movimento di un aerostato allungato l'esistenza di una coppia perturbatrice dovuta alle pressioni dell'aria, alla quale faceva riscontro una coppia raddrizzante dovuta alla forza sostentatrice del gaz; tali da determinare e mantenere nel sistema volante un movimento rotatorio attorno al centro di gravità, analogo al *beccheggio* delle navi. Queste due coppie di contrario effetto, potendo negli esperimenti ritenersi proporzionali ad una medesima funzione dell'angolo di cui s'inclinava l'asse del modello sulla direzione del vento, la coppia di raddrizzamento risultante poteva calcolarsi dalla semplice somma algebrica dei coefficienti di cui uno funzione della velocità del vento, l'altro costante. Ne conseguiva l'esistenza di un valore della velocità, detto dal Renard *velocità critica*, pel quale la coppia di raddrizzamento svaniva e al di là del quale mutava di segno.

Il sommo aeronauta trasportandosi col pensiero dalle esperienze sopra un modello al caso di un dirigibile idealmente scevro di altre azioni perturbatrici che navigasse nel libero cielo, era condotto alla immediata conclusione che un aerostato di comune forma dovesse ritenersi al di là della *velocità critica* instabile ed ingovernabile; e che pertanto il problema della

(1) Comptes Rendus, 23 nov. 1903.