# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIII.**

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

ora ponendo, per brevità, $C = \int_s N ds$, si ha dalla (25):

$$\int_s \Phi\, ds = C - \frac{C}{2A}\left(\int_s x \frac{dx}{dn} ds + \int_s y \frac{dy}{dn} ds\right),$$

e trasformando gli $\int_s$ del secondo membro in $\int_\sigma$ si trova che ciascuno di essi vale A, perciò il secondo membro è 0, cioè è verificata la (28).

La questione proposta è quindi ridotta alla determinazione della funzione U, armonica in $\sigma$, e che sul contorno $s$ assume i valori dati dalla (27), e ciò costituisce appunto il problema di Dirichlet per l'area $\sigma$.

Ottenuta la funzione U, le (26) ci faranno conoscere le funzioni $u$, $v$ che risolvono il problema considerato.

## Aeronautica. — *Sulla stabilità dei dirigibili.* Nota di G. A. Crocco, presentata dal Socio P. Blaserna.

Il colonnello Renard presentava tempo fa all'Accademia delle Scienze di Parigi [1] una Nota sulla stabilità dei dirigibili nella quale riferiva di alcuni suoi esperimenti su modelli di palloni fusiformi trattenuti per un asse baricentrico fisso ed esposti innanzi alla corrente d'aria costante di un ventilatore. L'eminente aeronauta era per essi condotto a riconoscere nel movimento di un aerostato allungato l'esistenza di una coppia perturbatrice dovuta alle pressioni dell'aria, alla quale faceva riscontro una coppia raddrizzante dovuta alla forza sostentatrice del gaz; tali da determinare e mantenere nel sistema volante un movimento rotatorio attorno al centro di gravità, analogo al *beccheggio* delle navi. Queste due coppie di contrario effetto, potendo negli esperimenti ritenersi proporzionali ad una medesima funzione dell'angolo di cui s'inclinava l'asse del modello sulla direzione del vento, la coppia di raddrizzamento risultante poteva calcolarsi dalla semplice somma algebrica dei coefficienti di cui uno funzione della velocità del vento, l'altro costante. Ne conseguiva l'esistenza di un valore della velocità, detto dal Renard *velocità critica*, pel quale la coppia di raddrizzamento svaniva e al di là del quale mutava di segno.

Il sommo aeronauta trasportandosi col pensiero dalle esperienze sopra un modello al caso di un dirigibile idealmente scevro di altre azioni perturbatrici che navigasse nel libero cielo, era condotto alla immediata conclusione che un aerostato di comune forma dovesse ritenersi al di là della *velocità critica* instabile ed ingovernabile; e che pertanto il problema della

(1) Comptes Rendus, 23 nov. 1903.

dirigibilità dovesse mutare indirizzo. In un'altra Nota [1] il colonnello Renard indicava poi alcuni sistemi fondati sull'impiego di grandi piani di coda, mediante i quali si potevano allontanare a volontà del costruttore i limiti così imposti alla stabilità dei dirigibili.

Ci è sembrato che di simili importanti deduzioni non fosse inutile ricercare una dimostrazione, ed abbiamo tentato di farlo ponendo il problema in termini più prossimi al vero; ma a nostra sorpresa la dimostrazione ci è riuscita affatto negativa portandoci innanzi a fenomeni assai più complessi che non apparisca dalle considerazioni precedenti. Non abbiamo però la pretesa, nell'esporre in questa succinta Nota il nostro pensiero, di avere risoluta una così delicata questione: crediamo solo di essere riusciti a presentarla sotto forma quanto meno imperfetta, nella speranza che ulteriori studî e razionali esperienze possano meglio definirla.

Faremo, col Renard, le ipotesi che la traiettoria del mobile aereo in considerazione sia compresa in un piano verticale; che in questo sempre rimanga il piano di simmetria del sistema; e che non si abbia a considerare altro movimento rotatorio oltre quello di beccheggio. Sarà supposta costante la forza sostentatrice del gaz, e costantemente eguale al peso del sistema; e l'inviluppo delle sue linee d'azione durante il beccheggio sarà considerato ridursi al centro di gravità, $G_1$, dell'aerostato. Indicheremo con G il centro di gravità di tutto il sistema.

Se $\varphi = F_1(t)$ indica l'angolo dell'asse di rivoluzione $AG_1$ dell'aerostato con la direzione, $v$, della sua velocità di cammino, la coppia di rovesciamento, indicata dal Renard, potrà scriversi per piccoli angoli:

$$C_1 = nv^2\varphi \tag{1}$$

dove $n$ rappresenta una costante per un dato tipo di dirigibile e per date dimensioni di questo. La coppia $C_1$ è dovuta ad una forza, $f$, risultante delle pressioni dinamiche dell'aria sull'aerostato, la cui direzione, quando $\varphi$ è diverso da zero, si allontana da quella dell'asse per la dissimetria con la quale il dirigibile colpisce l'aria nel suo moto. Sia A il punto, all'innanzi di $G_1$, ove $f$ taglia l'asse; e si indichi con $l$ la distanza $AG_1$.

Se $f$ si immagina decomposta in una componente normale all'asse, $f_1$, ed in una assiale, $f_2$; e se si suppone che quest'ultima sia continuamente corretta dalla spinta di un propulsore elasticissimo, e che non esista alcuna coppia dovuta a eccentricità di questa spinta; non rimarrà da considerare che la componente $f_1$: onde, per limitati valori del beccheggio, sarà permesso di supporre costante la velocità, $v$, di traslazione. Tutte le precedenti ipotesi sono implicite nelle considerazioni del Renard.

[1] Comptes Rendus, 7 dicembre 1904.

La coppia $C_1$ potrà infine esprimersi col prodotto $f_1 l$; e, ponendo per $l$ un conveniente valor medio, potrà ricavarsi dalla (1):

$$f_1 = kv^2\varphi \tag{2}$$

ove $k$ è una costante. Ciò equivale ad aver posto $n = kl$.

Sia adesso $\vartheta = F_2(t)$ la funzione esprimente il beccheggio dell'aerostato, e si misurino gli angoli $\vartheta$ sull'orizzonte. La coppia raddrizzante dovuta alla forza sostentatrice del gaz potrà scriversi, per piccoli angoli

$$C_2 = m\gamma\delta\vartheta \tag{3}$$

ove $m$ designa la massa del sistema aereo, $\gamma$ l'accelerazione della gravità, e $\delta$ la distanza fra i centri d gravità $G_1$ e $G$. Nelle esperienze del Renard si ha forzosamente $\varphi = \vartheta$; onde sono direttamente comparabili tra di loro, come si è accennato le coppie $C_1$ e $C_2$. Ma allorchè il pallone è libero nello spazio da qualunque reazione di vincolo esso subisce, sotto l'azione della forza $f_1$, un movimento verticale $= F_3(t)$ la cui velocità, $\frac{dz}{dt}$, componendosi con la velocità di traslazione orizzontale, dà una risultante, indicata con $v$, il cui angolo con l'orizzonte, $\beta = F_4(t)$ non è più costante. In questo caso si avrà

$$\varphi = \vartheta - \beta \tag{4}$$

e le coppie $C_1$, $C_2$ saranno tanto meno comparabili, a priori, tra di loro, quanto più nella eguaglianza $C = f_1 l$ prevarrà il fattore $f_1$.

Un'altra considerazione porta le nostre conclusioni a divergere da quelle del Renard: e, cioè, l'esistenza di una terza coppia, $C_3$, sfuggita al Renard, inerente alla natura del fenomeno in discorso e che vi rappresenta una parte principale. Questa coppia, di essenza dinamica per rapporto al beccheggio, e sempre a questo contraria in modo da ammorzarlo, non è trascurabile quando il dirigibile oscilli in aria calma; e assume poi notevoli valori durante il moto. Per un piano che oscillasse secondo la funzione $\vartheta$ attorno ad un asse normale alla velocità $v$ di strascinamento, la coppia $C_3$ si dimostra data, per elevati valori di $v$, da

$$C_3 = sv\frac{d\vartheta}{dt} \tag{5}$$

ove $s$ è una costante. Nel caso complesso dell'aerostato si potrà ritenere per $C_3$ la (5), adottando per $s$ un conveniente valor medio. Porremo $s = kr^2$, ove $k$ ha lo stesso significato e lo stesso valore della (2) ed $r$ risulta una *lunghezza*.

Ritenendo infine per piccoli angoli

$$\beta = \frac{1}{v}\frac{dz}{dt} \tag{6}$$

potremo con l' uso delle (1), (2), (3), (4), (5), (6) esprimere i principali elementi del problema in funzione di $\vartheta$ e $\beta$, e delle loro derivate. Ci sarà così permesso, sempre nella considerazione di piccoli angoli, di scrivere le equazioni differenziali simultanee del beccheggio e del movimento verticale, alle quali, per le precedenti ipotesi, abbiamo ridotto la questione.

Se $j$ rappresenta il momento d' inerzia del sistema aereo rispetto all'asse baricentrico normale al piano di simmetria, l'equazione del beccheggio potrà scriversi:

$$j\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + kr^2 v\frac{d\vartheta}{dt} + m\gamma\delta\,\vartheta - klv^2(\vartheta - \beta) = 0 \tag{7}$$

e quella del movimento verticale:

$$mv\frac{d\beta}{dt} - kv^2(\vartheta - \beta) = 0 \tag{8}$$

Il sistema delle (7) e (8) si risolve agevolmente eliminando $\beta$ o $\vartheta$; e fornisce in entrambi i casi una medesima equazione differenziale lineare senza secondo membro, che, nel caso in cui si elimini $\beta$, è:

$$\frac{d^3\vartheta}{dt^3} + a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b\frac{d\vartheta}{dt} + c\vartheta = 0. \tag{9}$$

I coefficienti $a$, $b$, $c$ sono funzioni di $v$ della forma:

$$\left\{\begin{aligned} a &= k_1 v\,, \\ b &= k_2 - k_3 v^2\,, \\ c &= k_4 v\,, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

e le costanti $k_1$, $k_2$, $k_4$ sono sempre positive.

L' integrale generale della (9) si presenterà sotto forma di una somma di esponenziali reali, o di esponenziali reali e prodotti di esponenziali reali per funzioni trigonometriche a seconda che le radici della equazione algebrica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{11}$$

saranno reali o, in parte, immaginarie. È chiaro che se tutti gli esponenti che figurano nella espressione di $\vartheta$ sono negativi, il beccheggio, iniziato da cause perturbatrici sulle quali è ozioso fare ipotesi, tenderà praticamente ad estinguersi, e il moto del dirigibile potrà essere considerato stabile in modo assoluto. Che ove alcuno degli esponenti sia per contro positivo, si dovrà dubitare in pratica della stabilità del sistema. Il problema della stabilità rimane così ridotto alla ricerca del segno delle radici reali di (11) e della parte reale delle sue radici immaginarie.

Si riconosce subito l'esistenza di una radice negativa, $x_1$. Le altre due $x_2, x_3$ sono entrambe del medesimo segno, se reali. Onde, scrivendo

$$x_2 + x_3 = 2\alpha ,$$

ove $\alpha$ indicherà la parte reale delle radici, se queste sono complesse, basterà ricercare il segno di $\alpha$. Dalla nota relazione

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

si trarrà

$$2\alpha = -a - x_1$$

e si avrà $\alpha$ positivo, nullo o negativo recondo che la espressione

$$c - ab \tag{12}$$

risultato della sostituzione $x = -a$ nel primo membro della (11) sarà essa stessa positiva, nulla o negativa.

Sostituendo nella (12) le (10), la condizione di stabilità così determinata diviene:

$$k_1 k_3 v^2 - (k_1 k_2 - k_4) < 0 ; \tag{13}$$

e in essa, sostituendo ai simboli $k$ i loro valori in funzione degli elementi del pallone, riconoscesi che il secondo termine è essenzialmente positivo. Se, pertanto, si ha $k_3 \leqq 0$ la (3) è sempre sodisfatta. Nel caso invece in cui sia $k_3 > 0$ la (13) definisce un valore, $v_c$, di $v$ al disotto del quale è egualmente sodisfatta. Questo valore di $v$, che potrà effettivamente chiamarsi *velocità critica*, risulta, espresso in funzione degli elementi del pallone, da

$$v_c^2 = \frac{\gamma \delta m^2}{k(ml - kr^2)} \frac{r^2}{r^2 + \varrho^2} \tag{14}$$

ove $\varrho$ è il raggio d'inerzia definito dalla posizione $j = m\varrho^2$; laddove il valore di $v$ denominato velocità critica dal Renard è dato semplicemente da

$$v_c'^2 = \frac{\gamma \delta m}{kl} .$$

L'esame della (14) porta alla inattesa conclusione che la stabilità dei dirigibili non dipenderebbe tanto dalle relazioni fra $\delta$ ed $l$, quanto da quelle fra $ml$ e $kr^2$. Ove $r$ fosse per avventura nullo (nè è difficile immaginare sistemi ove sia piccolissimo) il dirigibile potrebbe essere instabile anche alle minime velocità; laddove per convenienti valori di $r$ il dirigibile rimarrebbe stabile fino a velocità di gran lunga superiori alla velocità critica del Renard. La stabilità sarebbe poi teoricamente senza limiti qualora si avesse $ml \lesseqgtr kr^2$.

Sulle relazioni fra $l$ ed $r$ non si hanno ancora sperimentali notizie; nè sul valore di $l$. Le sovraesposte conclusioni hanno quindi bisogno di ricerche sperimentali, perchè ne sia definita la portata: è però facile riconoscere che si può in pratica accrescere $kr^2$ con l'uso precisamente di quei *piani di coda* che il Renard adopera per diminuire $l$. Questo nuovo aspetto sotto il quale si presenta l'azione dei piani di coda ne modifica sensibilmente il beneficio; e conduce alla conclusione che superfici di gran lunga inferiori a quelle preconizzate dal Renard sono sufficienti ad assicurare ai dirigibili allungati una stabilità teoricamente illimitata. Per il dirigibile « la France » risulterebbero sufficienti da cinque a sei metri quadrati di pinne caudali, in luogo dei trentotto richiesti dai calcoli del Renard.

Esaminando i casi di immaginarietà delle radici, non è difficile riconoscere come, teoricamente, sia possibile trovarsi in presenza di singolari fenomeni che meritano un ulteriore studio. Nel caso più comune in cui — durante il campo della stabilità cioè fra $v = 0$ e $v = v_c$ — il moto del dirigibile rimanga quasi *periodico*, gli angoli $\vartheta$ e $\varphi$ si potranno esprimere, convenientemente mutando l'origine dei tempi, mediante le funzioni:

$$\vartheta = \mathrm{A}e^{x_1 t} + \mathrm{B}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$\varphi = \mathrm{C}e^{x_1 t} + \mathrm{D}e^{\alpha t}\cos(\beta t + \xi)$$

nelle quali $x_1$ ed $\alpha$ sono sempre negativi; A e B rappresentano costanti derivate dalle ipotesi *iniziali* circa il moto; C e D sono legate ad A e B da agevoli relazioni; e l'angolo $\xi$, facile a determinarsi, definisce una differenza di fase fra $\varphi$ e $\vartheta$, che è anche differenza di fase fra $C_1$ e $C_2$, rispettivamente proporzionali a questi angoli. In tale differenza di fase, non mai nulla, va ricercata la ragione fisica del fatto singolare che il beccheggio possa rimanere stabile anche quando il massimo valore di $C_1$ superi il massimo valore di $C_2$.

**Fisica.** — *Intorno ad alcuni semplici strumenti per l'esatta verificazione dell'ora.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.