ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

L'ultima mia posizione è dell'1 Dicembre.

1904 Dicembre 1		$6^h 14^m 37^s$ R.C.R.
α apparente cometa		$21^h 12^m 40^s.19$ (9.283)
δ " "	$+$	$9^\circ 28' 38''.5$ (0.681)

Nessuna sicura definizione di nucleo, osservazioni quindi soggette ad errori sistematici.

Geologia. — *Su alcuni terreni eocenici della Dalmazia.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Patologia. — *Ricerche preliminari dirette a precisare le cause del gozzo e del cretinismo endemici.* Nota del Socio B. Grassi e del dott. Munaron.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica matematica. — *Sulla deformazione d'un diedro isotropo d'ampiezza sottomultipla di π.* Nota di Luciano Orlando, presentata dal Corrispondente G. A. Maggi.

Supponiamo che lo spazio s, limitato dalle due facce σ_1 e σ_2 d'un diedro d'ampiezza $\frac{\pi}{m}$, dove m denota un numero naturale, sia occupato da una sostanza solida, omogenea, isotropa, della quale rappresentino λ e μ le costanti elastiche. Noi studieremo la deformazione di questo solido, quando siano date in ogni punto di σ_1 le componenti tangenziali di spostamento e quella normale di tensione, e, viceversa, in ogni punto di σ_2 le componenti tangenziali di tensione e quella normale di spostamento. Noi scegliamo questo caso fra i casi *misti* o *alterni* relativi a questo solido, perchè è il meno semplice: gli altri, collo stesso metodo, si trattano più facilmente.

Denoti A_0 un punto interno a s, ed r la distanza fra A_0 e un punto variabile A; poi ancora A_1 il simmetrico di A_0 rispetto al piano σ_1, A_2 quello di A_1 rispetto al piano σ_2, A_3 quello di A_2 rispetto a σ_1, etc. Io dico che continuando si ritorna in A_0; perchè i punti A_ν, se ν percorre la serie $1, 2, 3, \dots, 2k$, risultano complanari, equidistanti dalla costola del diedro, e situati ad ampiezze angolari da σ_1 misurate rispettivamente da

$$-\alpha\,,\quad \alpha+2\frac{\pi}{m}\,,\quad -\alpha-2\frac{\pi}{m}\,,\quad \alpha+4\frac{\pi}{m}\,, \dots, \alpha+2k\frac{\pi}{m}$$

dove α denota l'ampiezza relativa ad A_0. È chiaro che, per $k=m$, resta dimostrata la coincidenza di A_{2m} con A_0. È facile anche osservare che i punti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2m-1}$ risultano esterni a s, perchè quelli, fra i relativi angoli, che sono positivi, superano $\frac{\pi}{m}$ e sono superati da 2π, mentre che i negativi superano $-2\pi+\alpha$. Si chiami r_ν la distanza generica di A da A_ν.

Noi vogliamo assumere per asse delle z la costola del diedro, e per assi delle x e delle y due rette normali alla costola, poi diremo x_1 e y_1 due assi ottogonali in σ_1, e z_1 la relativa normale, e poi x_2, y_2, z_2 tre analoghi assi relativi a σ_2. Siano le componenti di spostamento secondo le direzioni x, y, z indicate con ξ, η, ζ, e analoga significazione abbiano $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ secondo le direzioni che compongono le due altre terne; ancora con $L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2$ si rappresentino le relative componenti di tensione superficiale. Indichi θ la dilatazione cubica, e le forze di massa siano supposte nulle.

Nei punti di σ_1 le due equazioni

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1},$$

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y^1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1}$$

se eliminiamo $\frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1}$, ci fanno conoscere θ, perchè le rimanenti grandezze sono conosciute. Nei punti di σ_2 l'equazione

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_2}{\partial y_2} + \frac{\partial N_2}{\partial z_2} = 0$$

ci fa conoscere $\frac{\partial N_2}{\partial z_2}$; ed, aggiungendo a sinistra e a destra nell'altra equazione

$$\frac{\partial N_2}{\partial z_2} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z_2} - 2\mu \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial z_2^2}$$

il termine noto

$$-2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta^2}{\partial y_2^2}\right),$$

otteniamo che la terza equazione d'equilibrio ci dà subito, linearmente $\frac{\partial \theta}{\partial z_2}$; cioè otteniamo della funzione armonica θ i valori nei punti di σ_1, e quelli della derivata sulla normale nei punti di σ_2: basta risolvere un problema misto di Dirichlet, molto facile, per avere il valore di θ in ogni punto interno A_0. La funzione, analoga a quella di Green, utile all' uopo, è evidentemente

$$\sum_{\nu=1}^{2m-1} \frac{\tau}{r_\nu}, \tag{1}$$

dove τ denota $(-1)^{p+1}$ quando ν denota $2p-1$ o $2p$.

Determinato agevolmente il valore di θ in ogni punto interno di s, noi adoperiamo ora coordinate cilindriche, come a pag. 196 del trattato del Cesàro ([1]). L'asse z sarà l'asse dei cilindri coordinati, e w, coincidente con ζ, sarà la componente assiale di spostamento, poi sarà u la componente radiale, ed Rv quella sul parallelo di raggio R.

Anzitutto la coincidenza di w con ζ concede l'immediato calcolo di w in ogni punto interno. Infatti nei punti di σ_1 è nota la componente tangenziale ζ, e nei punti di σ_2 vale l'equazione

$$L_2 = -\mu\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z_2} + \frac{\partial\zeta_2}{\partial z}\right),$$

ottenuta facendo coincidere la direzione di x_2 con quella di z; e se ne ricava la derivata di ζ sulla normale. È poi noto $\Delta_2\zeta$ in ogni punto di s, dunque la risoluzione del medesimo problema di Dirichlet dianzi incontrato ci farà conoscere ζ o w in ogni punto interno A_0.

Valgono ora nei punti di σ_1 le due equazioni

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2(uR)}{\partial R\,\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial\psi\,\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial\psi} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2} - R\frac{\partial^2 v}{\partial\psi\,\partial z},$$

dove ψ denota la coordinata angolare e T_1 la componente di rotazione misurata lungo il raggio. È facile eliminare $\frac{\partial^2 v}{\partial\psi\,\partial z}$, e dedurre subito la derivata di T_1 sulla normale. Nei punti di σ_2, dove v è nota, ed è, per il precedente calcolo, nota anche w, l'equazione

$$T_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\psi} - R\frac{\partial v}{\partial z}$$

([1]) *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*. Torino, F.lli Bocca, 1894.

fornisce subito il valore di T_1. È inoltre valida in ogni punto interno la equazione

$$\frac{A}{R}\frac{\partial\theta}{\partial\psi}+B\left(\frac{\partial T_3}{\partial R}-\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=0,$$

dove A e B rappresentano due costanti e T_3 la componente di rotazione secondo la direzione fissa z. È chiaro, appunto per l'invariabilità di questa direzione, che è $\Delta_2 T_3 = 0$, dunque è subito calcolato, con una semplice integrazione rispetto a z (dove la costante è nulla perchè è nulla all'infinito) anche il $\Delta_2 T_1$. Risolvendo un problema di Dirichlet, correlativo e perfettamente analogo al precedente, servendoci della (1), dove τ abbia il valore $(-1)^p$, invece che $(-1)^{p+1}$, noi conosceremo T_1 in ogni punto interno A_0. Un'altra semplice integrazione in dz, senza costante addittiva, ci farà conoscere v in ogni punto A_0. Poi avremo anche subito u.

Noi qui non facciamo discussione circa la possibilità del problema, perciò ammettiamo senz'altro che le nostre funzioni si comportino regolarmente anche sulla costola del diedro.

È chiaro che la conoscenza di u, v, w è equivalente alla conoscenza di ξ, η, ζ, e risolve il problema della deformazione.

Questo metodo si applica facilmente alla trattazione dei medesimi problemi relativi a un cuneo isotropo, ottenuto da s con due sezioni normali. L'effettiva esecuzione dei calcoli richiede soltanto pazienza, ma non s'incontrano difficoltà teoriche: noi non consideriamo come tali le difficoltà d'integrazione nel calcolo degl'integrali definiti, le quali sono difficoltà relative ad altre teorie, non a queste.

Matematica. — *Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio L. Bianchi.

Matematica. — *Sulle formole che danno la deformazione di una sfera elastica isotropa.* Nota del prof. G. Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.