ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Matematica. — *Sur la multiplication de deux séries de coefficients binomiaux.* Nota di NIELS NIELSEN, presentata dal Socio U. DINI.

Dans une Note ([1]) que M. Dini m'a fait l'honneur de présenter à la Reale Accademia dei Lincei j'ai étudié la multiplication de deux séries de factorielles de la forme

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{1}$$

où les coefficients b_s sont indépendants de x. Or, il est bien intéressant, ce me semble, qu'une méthode analogue est applicable pour la multiplication de deux séries assez générales de coefficients binomiaux, savoir séries de cette forme

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \binom{x-1}{s}, \tag{2}$$

où les coefficients a_s sont indépendants de x, et où nous avons posé pour abréger

$$\binom{x-1}{0} = 1 \quad , \quad \binom{x-1}{r} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-r)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots r}\,.$$

De plus, notre dernière méthode nous conduira à la généralisation d'une formule intéressante concernant la multiplication de deux intégrales définies, formule que j'ai trouvée comme corollaire dans ma Note susdite.

Considérons en effet ces deux intégrales définies

$$\mathfrak{W}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt\ , \tag{3}$$

$$\mathfrak{W}_1(x) = \int_0^1 \psi(t)\, t^{x-1}\, dt\ , \tag{4}$$

où les fonctions génératrices $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ doivent satisfaire dans toute l'intervalle d'intégration $0 \leqq t \leqq 1$ à des conditions de cette forme

$$t^{\rho}(1-t)^{\rho}\,|\varphi(t)| < \mathrm{K} \tag{5}$$

$$t^{\rho_1}(1-t)^{\rho_1}\,|\psi(t)| < \mathrm{K}, \tag{6}$$

([1]) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, seduta del 17 gennaio 1904.

où K et K_1 désignent deux quantités positives et finies, tandis que

$$0 \leqq \varrho < 1 \quad , \quad 0 \leqq \varrho_1 < 1 .$$

Cela posé, je dis que les deux fonctions (3) et (4) sont développables dans une série de la forme (2) convergente pourvu que $\Re(x) > 0$ [1]. Écrivons en effet sous cette forme l'intégrale (1)

$$\mathfrak{W}(x) = \int_0^1 \varphi(t) \left[1 - (1-t)\right]^{x-1} dt ,$$

puis supposons $\Re(x) > 0$, la série infinie

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{x-1}{s} (1-t)^s$$

est intégrable terme à terme de $t=0$ à $t=1$, ce qui donnera immédiatement pour $\mathfrak{W}(x)$ le développement cherché

$$\mathfrak{W}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \binom{x-1}{s} , \tag{7}$$

où nous avons posé pour abréger

$$a_n = \Delta^n \mathfrak{W}(1) = (-1)^n \int_0^1 \varphi(t)\,(1-t)^n\, dt . \tag{7bis}$$

Quant au coefficient général a_n, l'inégalité (5) donnera sans peine la valeur majorante

$$|a_n| < \mathrm{K} \cdot \int_0^1 t^{-\varrho} (1-t)^{n-\varrho}\, dt = \frac{\mathrm{K}\, \Gamma(1-\varrho)\, \Gamma(n+1-\varrho)}{\Gamma(n+2-2\varrho)} ; \tag{8}$$

posons maintenant pour abréger

$$\Gamma_r(\omega) = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (r-1) \cdot r^\omega}{\omega(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+r-1)} ,$$

où r désigne un positif entier fini, nous aurons

$$\lim_{r=\infty} \Gamma_r(\omega) = \Gamma(\omega),$$

[1] $\Re(x)$ désigne la partie réelle de x.

d'où, en vertu de (8)

(8 *bis*) $$|a_n| < \mathrm{L} \cdot n^{\varrho-1},$$

où L désigne une quantité positive qui restera finie même pour n infiniment grand.

Posons ensuite $x = x' + i x''$, où x' et x'' désignent des quantités réelles, nous aurons, en vertu de (8 *bis*), la valeur majorante nouvelle

$$\left| a_n \binom{x-1}{n} \right| < \frac{\mathrm{L}}{|\Gamma_n(1-x)|} \cdot n^{\varrho - x' - 1},$$

d'où ce théorème:

L'intégrale définie $\mathfrak{W}(x)$ *est développable en série de coefficients binomiaux, série qui est certainement convergente pour les valeurs finies de* x *qui satisfont à l'inégalité* $\Re(x) > 0$, *mais absolument convergente pourvu que nous ayons de plus* $\Re(x) > \varrho$.

Pour étudier maintenant le développement en série de coefficients binomiaux du produit $\mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x)$, considérons tout d'abord le développement du produit plus particulier

$$\binom{x-1}{n} \cdot \mathfrak{W}(x).$$

Or, écrivons sous cette forme la définition intégrale (3)

$$\mathfrak{W}(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^n \cdot t^{x-n-1}\, dt,$$

nous aurons le développement nouveau

(9) $$\mathfrak{W}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \mathrm{A}_{n,s} \cdot \binom{x-n-1}{s},$$

où nous avons posé pour abréger

(10) $$\mathrm{A}_{n,s} = (-1)^s \int_0^1 \varphi(t)\, t^n (1-t)^s\, dt = \Delta^s\, \mathfrak{W}(n+1),$$

et la série figurant au second membre de (9) est certainement convergente, pourvu que $\Re(x) > n$.

Posons maintenant dans (10)

$$t^n = [1 - (1-t)]^n,$$

nous avons, en vertu de (7 *bis*), pour $\mathrm{A}_{n,s}$ ce développement nouveau

(10 *bis*) $$\mathrm{A}_{n,s} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{s+r}.$$

Appliquons ensuite l'identité élémentaire

$$\binom{x-1}{n}\binom{x-n-1}{s}=\binom{n+s}{s}\binom{x-1}{n+s},$$

nous aurons, en vertu de (9),

$$(11)\qquad \binom{x-1}{n}\cdot\mathfrak{W}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\mathrm{B}_{n,s}\binom{x-1}{n+s},$$

où nous avons posé pour abréger

$$(11\,bis)\qquad \mathrm{B}_{n,s}=\binom{n+s}{s}\cdot\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r}a_{r,s}.$$

Cela posé, appliquons l'inégalité (3), nous aurons, en vertu de (10), cette valeur majorante

$$|\mathrm{A}_{n,s}|<\mathrm{K}\,\frac{\Gamma(n+1-\varrho)\,\Gamma(s+1-\varrho)}{\Gamma(n+s+2-2\varrho)},$$

ou, ce qui vaut autant,

$$(12)\qquad \left|\mathrm{B}_{n,s}\binom{x-1}{n+s}\right|<\mathrm{L}_1\cdot n^{1-\varrho}\left(\frac{s}{n+s}\right)^{1-\varrho}\cdot\frac{1}{(n+s)^{1+x'-\varrho}},$$

où L_1 désigne une quantité positive qui restera finie même pour des valeurs extrêmement grandes de s, tandis que $x=x'+ix''$; c'est-à-dire que nous avons démontré cette proposition intéressante:

La série de coefficients binomiaux (11) *est absolument convergente, pourvu que* $\Re(x)>\varrho$.

Or, mettons

$$(13)\qquad \mathfrak{W}_1(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}b_s\binom{x-1}{s},$$

nous aurons

$$(14)\qquad b_s=(-1)^s\int_0^1\psi(t)\,(1-t)^s\,dt=\Delta^s\mathfrak{W}_1(1),$$

et, en vertu de (8 *bis*), cette valeur majorante

$$(14\,bis)\qquad |b_s|<\mathrm{L}_2\,s^{\varrho_1-1},$$

tandis que la formule (11) donnera cette autre

$$(15)\qquad b_n\binom{x-1}{n}\mathfrak{W}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}b_n\,\mathrm{B}_{n,s}\binom{x-1}{n+s},$$

d'où, en vertu de (12) et (14 *bis*)

(16) $$\left| b_n \, B_{n,s}\binom{x-1}{n+s} \right| < \left(\frac{n}{n+s}\right)^{\rho_1-\rho} \left(\frac{s}{n+s}\right)^{1-\rho} \cdot \frac{L_1 \, L_2}{(n+s)^{1+\alpha'-\rho}} .$$

Cela posé, mettons dans (15) successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, puis ajoutons toutes les équations ainsi obtenues, nous aurons une série à double entrée $\varDelta$ dont les séries horizontales sont formées par les séries analogues à celle qui figure au second membre de (15), tandis que les termes contenant le même coefficient binomial forment les séries verticales de $\varDelta$. Or, il est évident que les séries verticales de $\varDelta$ sont absolument convergentes pour toutes les valeurs finies de x qui satisfont aux conditions $\Re(x) > \varrho$ et $\Re(x) > \varrho_1$. Quant aux séries horizontales de $\varDelta$, elles sont absolument convergentes aussi sous les mêmes conditions, ce qui donnera immédiatement l'inégalité (16); c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général:

Le produit $\mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x)$ des deux intégrales (3) *et* (4) *est développable en série de coefficients binomiaux comme suit:*

(17) $$\mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \mathfrak{A}_s \binom{x-1}{s},$$

série qui est certainement absolument convergente pour toutes les valeurs finies de x qui satisfont aux conditions $\Re(x) > \varrho$ et $\Re(x) > \varrho_1$, tandis que nous avons posé pour abréger

(17*bis*) $$\mathfrak{A}_n = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} b_s \, A_{s,n-s},$$

où $A_{p,q}$ est le coefficient défini dans (10 *bis*).

Plus tard nous avons à démontrer que la série (17) est convergente pour toutes les valeurs finies de x à partie réelle positive.

L'expression (17*bis*) pour le coefficient général est assez compliquée, il est vrai; or, introduisons les expressions intégrales tirées de (10) et (14), nous aurons

$$\mathfrak{A}_n = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} \int_0^1 \varphi(t) \, t^s (1-t)^{n-s} \, dt \cdot \int_0^1 \psi(u) \, (1-u)^s \, du ,$$

d'où immédiatement

$$\mathfrak{A}_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \varphi(t) \, \psi(u) \, (1-tu)^n \, dt \, du ;$$

posons ensuite $tu = z$, nous aurons sans peine

(18) $$\mathfrak{A}_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^t \frac{\varphi(t)}{t} \, \psi\left(\frac{z}{t}\right) (1-z)^n \, dt \, dz ,$$

ou, ce qui revient au même (¹),

$$(18\,bis)\qquad \mathfrak{A}_n = (-1)^n \int_0^1 (1-z)^n \left(\int_z^1 \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \psi\left(\frac{z}{t}\right) dt \right) dz,$$

de sorte qu'une comparaison entre (18 *bis*) et (7 *bis*) donnera ce théorème général:

Le produit des deux intégrales $\mathfrak{W}(x)$ et $\mathfrak{W}_1(x)$ est toujours une intégrale du même genre, savoir

$$(19)\qquad \mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x) = \int_0^1 \chi(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(19\,bis)\qquad \chi(t) = \int_t^1 \frac{\varphi(z)}{z} \cdot \psi\left(\frac{t}{z}\right) dz.$$

Or, la formule intégrale (19) connue, nous pouvons suppléer comme suit le théorème concernant la convergence de la série (17):

La série de coefficients binomiaux obtenue pour le produit $\mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x)$ est convergente pour toutes les valeurs finies de x à partie réelle positive.

On voit du reste que la formule (19) peut être obtenue en multipliant les deux intégrales (3) et (4) et en traitant le produit ainsi obtenu de la même manière que l'expression obtenue pour $\mathfrak{A}_n$, ce qui nous conduira, pour des valeurs positives de x, à (19). Remarquons ensuite que les trois fonctions $\mathfrak{W}(x)$, $\mathfrak{W}_1(x)$ et $\mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x)$ sont des fonctions analytiques de x, pourvu que $\mathfrak{R}(x) > 0$, nous avons démontré la formule générale (19).

Cependant il faut remarquer que cette démonstration directe de (19) ne dit rien concernant les coefficients de la série de coefficient binomiaux obtenue pour $\mathfrak{W}(x) \cdot \mathfrak{W}_1(x)$, de sorte qu'il faut reproduire dans l'ordre inverse nos calculs précédents.

M. Pincherle m'a indiqué la condition *nécessaire* et *suffisante* qui doit être remplie par une fonction développable en série de coefficients binomiaux, condition qui montre que les intégrales définies de la forme (3) ne représentent qu'un cas particulier des fonctions susdites. Pour étudier maintenant le problème général concernant la multiplication de deux séries de coefficients binomiaux revenons à la formule (9) et cherchons au second membre tous les termes contenant comme facteur le même coefficient a_p, puis remarquons que les coefficients a_s peuvent être considérés comme indépendants entre eux, nous aurons la formule élémentaire

$$(20)\qquad \binom{x-1}{n}\binom{x-1}{p} = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n+s}{n}\binom{x-1}{n+s} = \sum_{s=0}^{s=p} \binom{n+s}{p}\binom{x-1}{n+s}.$$

Cela posé, nous avons démontré cette proposition remarquable:

(¹) Stolz, *Grundzüge der Differenzial- und Integralrechnung*, t. III, pag. 89.

Supposons développable en série de coefficients binomiaux le produit de ces deux séries du même genre

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \binom{x-1}{s}, \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \binom{x-1}{s},$$

la formule (17*bis*) *nous détermine le coefficient général de ce développement nouveau.*

Considérons maintenant cette série de coefficients binomiaux, convergente pourvu que $\Re(x) > \lambda$ [1]

$$\text{(21)} \qquad W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \cdot \binom{x-1}{s}$$

nous aurons immédiatement

$$\text{(22)} \qquad \binom{x-1}{n} \cdot W(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \binom{x-1}{s}\binom{x-1}{n};$$

transformons ensuite, à l'aide de (20), tous les produits de deux coefficients binomiaux qui figurent au second membre de (22), nous aurons une série particulière à double entrée Δ, dont les séries horizontales sont formées par les expressions ainsi obtenues écrites de sorte que les termes qui contiennent le même coefficient binomial par exemple $\binom{x-1}{p}$ forment les séries verticales de Δ; c'est-à-dire que toutes ces séries simples, verticales et horizontales, contiennent $n+1$ termes au plus.

Quant aux séries horizontales de Δ, elles sont certainement absolument convergentes, pourvu que $\Re(x) > \lambda + 1$ [2], tandis que les séries verticales se présentent sous cette forme

$$\text{(23)} \qquad u_p = \binom{x-1}{p}\binom{p}{n}\left[\binom{n}{0} a_p + \binom{n}{1} a_{p-1} + \cdots + \binom{n}{n} a_{p-n}\right],$$

où il faut, pour des petites valeurs des p, supprimer les termes contenant un coefficient a_r à indice négatif.

Cela posé, l'identité

$$a_r \binom{x-1}{r} = \frac{(-1)^r a_r}{\Gamma_r(1-x)\, r^x}$$

[1] Le champ de convergence d'une série de coefficients binomiaux est la partie finie du plan des x, située à droite d'une certaine ligne $\Re(x) = \lambda$ perpendiculaire à l'axe réelle.

[2] Le champ de convergence *absolue* de la série $W(x)$ est aussi une ligne perpendiculaire à l'axe réelle, et la largeur de la bande de convergence non absolue ne peut jamais être plus grande que l'unité.

nous donnera cette valeur majorante

$$(24) \qquad |a_r| < \mathrm{K} \cdot r^{\lambda+\varepsilon},$$

où K désigne un nombre positif qui restera fini même pour des valeurs infiniment grandes de r, tandis que ε est une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.

Or, l'inégalité (24) donnera immédiatement cette autre

$$(25) \qquad |u_p| < \mathrm{K}_1 \cdot p^{\lambda+n+\varepsilon-x'},$$

où K_1 est un nombre du même caractère que K, tandis que nous avons posé $x = x' + i\,x''$; c'est-à-dire que la série infinie

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

est certainement absolument convergente pour les valeurs finies de x qui satisfont à l'inégalité $\Re(x) > n + \lambda + 1$, d'où cette proposition essentielle:

Supposons convergente pour $\Re(x) > \lambda$ *une série* $\mathrm{W}(x)$ *de coefficients binomiaux, la série du même genre obtenue pour* $\binom{x-1}{n} \cdot \mathrm{W}(x)$ *est certainement absolument convergente, pourvu que* $\Re(x) > \lambda + n + 1$.

Considérons par exemple la série binomiale ordinaire, nous aurons, pourvu que $|\alpha| < 1$,

$$(26) \qquad (1+\alpha)^{x-1} \cdot \binom{x-1}{n} = (1+\alpha)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{n+s}{s} \binom{x-1}{n+s} \alpha^s,$$

formule qui n'est au fond autre chose que l'identité élémentaire

$$(1+\alpha)^{x-1} = (1+\alpha)^n\,(1+\alpha)^{x-n-1}.$$

On voit que (26) est pour $|\alpha| < 1$, valable pour une valeur finie quelconque de x. Dans le cas particulier $\alpha = 1$, la formule (26) n'est valable au contraire, que pourvu que $\Re(x) > n$; c'est-à-dire que la condition *suffisante* pour la convergence de la série de coefficients binomiaux que nous venons d'établir peut être *nécessaire* aussi. En vérité je ne sais, pour le moment, aucune méthode générale pour décider si le produit de deux séries de coefficients binomiaux est développable ou non dans une série du même genre.