ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

siccome queste formano un *gruppo*, così, per la nota teoria di Lie, le loro trasformazioni infinitesime soddisfanno alla indicata proprietà. Ma è evidente che lo stesso ragionamento potrà farsi per i primi membri delle (39), cioè delle equazioni di Betti estese, perchè le formole che dànno le x'' e quelle che dànno le z' formano anche evidentemente un gruppo. Onde abbiamo: *i primi membri* U_{hk} *delle equazioni di Betti estese e completate colle altre due categorie* (*oltre le tre già considerate da Betti*) *formano un sistema completo, cioè le parentesi formate con due delle operazioni da essi rappresentati, sono una combinazione lineare di tutte le* U.

Per fissare le idee, indichiamo con U_{hk} l'operazione rappresentata dal primo membro di quella fra le equazioni (39) che corrisponde al parametro $\alpha_k^{(h)}$ giusta il modo di deduzione che abbiamo tenuto; i primi membri di (39) saranno rispettivamente rappresentati da:

$$U_{pi}\ ,\ U_{hi}\ ,\ U_{hp}\ ,\ U_{ii}\ ,\ U_{pp}\,.$$

Possono allora facilmente verificarsi le seguenti formole (in cui gli indici possono avere tutti i valori, *compreso* p):

$$(46)\qquad \begin{cases} (U_{hi}\ ,\ U_{kl}) = 0 & ,\ \text{per } i \neq k\ ,\ h \neq l \\ (U_{hi}\ ,\ U_{il}) = U_{hl} & ,\ \text{per } h \neq l \\ (U_{hi}\ ,\ U_{kh}) = -U_{ki} & ,\ \text{per } i \neq k \\ (U_{hi}\ ,\ U_{ih}) = U_{hh} - U_{ii}\,. \end{cases}$$

Chimica. — *Le leggi fondamentali della stechiometria chimica, e la teoria atomica. Il discorso Faraday del prof. W. Ostwald.* Memoria del Corrispondente R. NASINI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sulle formole che danno la deformazione di una sfera elastica isotropa.* Nota del prof. G. LAURICELLA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

La presente Nota è da considerarsi come un complemento alle due mie Note sullo stesso argomento pubblicate rispettivamente negli *Annali di Matematica* (tom. VI, ser. III, anno 1901) e nel *Nuovo Cimento* (tom. V, ser. V, anno 1903), nelle quali ritrovo le eleganti formole del prof. Almansi [1] sotto

[1] *Sulla deformazione della sfera elastica.* Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, ser. II, tom. XLVII.

una forma più evoluta e paragonabile alle note formole di risoluzione del *problema di Dirichlet* e di quello *derivato di Dirichlet* per una sfera o un campo indefinito limitato da una superficie sferica. Qui voglio fare una verifica diretta di quelle formole; e precisamente voglio dimostrare che *la continuità delle funzioni date ad arbitrio è sufficiente, perchè le formole trovate risolvano effettivamente ogni volta il problema proposto.*

In ciò che segue indicherò col simbolo (I) la prima delle due citate Note, col simbolo (II) la seconda, e mi varrò, senza aggiungere spiegazioni, delle notazioni in esse introdotte.

1. Le formole (2)′ della (I) servono a rappresentare un qualunque sistema di integrali delle equazioni (1) della (I) dell'equilibrio, ammesso che tali integrali siano finiti e continui insieme alle loro derivate dei due primi ordini in tutti i punti della sfera (i punti della superficie σ inclusi) e che si abbia sui punti di σ:

$$\xi = f_1\,, \qquad \eta = 0\,, \qquad \zeta = 0\,;$$

sicchè in particolare per gli integrali $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ si potrà scrivere:

$$1 = \frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma\,,$$

$$0 = \frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma\,,$$

$$0 = \frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma\,.$$

Ciò premesso, si considerino le formole (2)′ della (I) e, senza fare alcuna ipotesi circa al significato di ξ, η, ζ, supponiamo che *la funzione arbitraria f_1 sia finita e continua in tutto il campo di variabilità σ.*

Indicato con $f_1^{(0)}$ il valore della f_1 in un punto p_0 preso arbitrariamente su σ e con P_0 un punto qualsiasi interno alla sfera e situato sul raggio che passa per p_0, si può scrivere, in forza delle formole precedenti,

$$\xi(\mathrm{P}_0) - f_1^{(0)} = \frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma\,,$$

$$\eta(\mathrm{P}_0) = \frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma\,,$$

$$\zeta(\mathrm{P}_0) = \frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right\} d\sigma\,.$$

Dalla formola:

$$\lim_{\varrho=\mathrm{R}} r^3 \int_0^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho = \lim_{\varrho=\mathrm{R}} \frac{\varrho^t \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\dfrac{\mathrm{R}^2 - \varrho^2}{r^3} \right)}{\dfrac{d}{d\varrho} \left(\dfrac{1}{r^3} \right)}$$

risulta facilmente che si può fissare una quantità finita e positiva A tale che si abbia, qualunque sia il punto p_0 e qualunque sia la distanza di P_0 da p_0,

$$(\alpha) \qquad \left| r^3 \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right| < A.$$

È chiaro poi che la quantità A si può fissarla in modo ancora che si abbia, indipendentemente da p_0 e dalla distanza di P_0 da p_0:

$$(\alpha)' \quad \left| r^3 \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right| < A, \quad \left| r^3 \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right| < A.$$

Descriviamo con centro in p_0 e con raggio uguale al segmento δ (δ pel momento indeterminato, ma non superiore ad R) una sfera; e indichiamo con σ_1 la porzione di σ interna a questa sfera, con σ_2 la porzione esterna. Evidentemente si può fissare una quantità finita e positiva B, indipendentemente dalla scelta del punto p_0, dalla distanza di P_0 da p_0, e da δ, tale che si abbia:

$$\frac{R+\varrho}{4\pi R}\int_{\sigma_2}\left|\frac{1}{r^3}+\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)d\varrho\right| d\sigma < \frac{B}{\delta^2},$$

$$\frac{R+\varrho}{4\pi R}\int_{\sigma_2}\left|\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)d\varrho\right| d\sigma < \frac{B}{\delta^2},$$

. . . .

Se si rammenta poi che si ha, qualunque sia δ e ovunque sia P_0,

$$\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_{\sigma_1}\frac{d\sigma}{r^3} \leq 1,$$

e se si indica con ϱ_1 una quantità fissata arbitrariamente, maggiore di *zero* e minore di R, avremo dalle (α), (α)' per $P_0 p_0 \leq R - \varrho_1$:

$$\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_{\sigma_1}\left|\frac{1}{r^3}+\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)d\varrho\right| d\sigma < 1+\frac{kA}{2(2+k)\,\varrho_1^{t+1}} = A_1,$$

$$\frac{R^2-\varrho^2}{4\pi R}\int_{\sigma_1}\left|\frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}}\int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right)d\varrho\right| d\sigma < \frac{kA}{2(2+k)\,\varrho_1^{t+1}} < A_1,$$

. . . .

con A_1 quantità finita e positiva, che si può fissare indipendentemente dalla posizione di p_0 e dall'ampiezza di δ.

Ciò premesso, data una quantità positiva ε comunque piccola, in forza della continuità della funzione f_1 su σ, si può fissare il segmento δ, indipendentemente dalla posizione del punto p_0, in modo che si abbia ogni volta in tutti i punti della corrispondente regione σ_1:

$$|f_1 - f_1^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2A_1},$$

ed in modo ancora che, indicando con M il massimo valore assoluto della funzione f_1, sia:

$$R - \frac{\varepsilon\delta^2}{4MB} > 0;$$

allora risulterà dalle precedenti formole per $P_0 p_0 \leq R - \varrho_1$:

$$|\xi(P_0) - f_1^{(0)}| \leq \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\varepsilon}{2A_1} \int_{\sigma_1} \left| \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right| d\sigma +$$

$$+ \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \cdot 2M \int_{\sigma_2} \left| \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\varrho^{t+1}} \int_0^\rho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3} \right) d\varrho \right| d\sigma$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R - \varrho}{\delta^2} \cdot 2MB,$$

$$|\eta(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R - \varrho}{\delta^2} \cdot 2MB,$$

$$|\zeta(P_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R - \varrho}{\delta^2} \cdot 2MB;$$

per conseguenza, se indichiamo con ϱ_2 la più grande delle due quantità ϱ_1, $R - \frac{\varepsilon\delta^2}{4MB}$, risulterà per $P_0 p_0 \leq R - \varrho_2$:

$$|\xi(P_0) - f_1^{(0)}| < \varepsilon \quad , \quad |\eta(P_0)| < \varepsilon \quad , \quad |\zeta(P_0)| < \varepsilon ,$$

qualunque sia il punto p_0 preso a considerare.

Da queste formole e dal fatto che la quantità ϱ_2 può essere fissata indipendentemente dalla posizione del punto p_0, risulta:

$$\lim_{Pp_0=0} \xi(P) = f_1^{(0)} \quad , \quad \lim_{Pp_0=0} \eta(P) = 0 \quad , \quad \lim_{Pp_0=0} \zeta(P) = 0 ,$$

qualunque sia la direzione e il modo secondo cui il punto P, interno alla sfera, si avvicina al punto p_0 di σ.

Se si osserva poi che le funzioni $\xi(P)$, $\eta(P)$, $\zeta(P)$ sono finite e continue insieme alle loro derivate dei due primi ordini in tutti i punti interni alla sfera (i punti di σ cioè al più esclusi) e che in questi punti soddisfanno alle equazioni (1) della (I) dell'equilibrio, avremo, appunto come si voleva dimostrare, che *la continuità della funzione f_1 è sufficiente, perchè le formole* (2)', *della* (I) *valgano a rappresentare le componenti di una deformazione della sfera, corrispondente ai valori arbitrariamente dati* f_1, 0, 0, *di queste componenti nei punti di* σ.

2. Passiamo ora all'esame delle (2)'' della (I).

Le funzioni:

$$(\beta) \qquad \xi_1 = \frac{R}{\varrho} + \frac{kR(\varrho^2 - R^2)}{2(3+2k)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x^2} \; , \; \eta_1 = \frac{kR(\varrho^2 - R^2)}{2(3+2k)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x \, \partial y} \; ,$$

$$\zeta_1 = \frac{kR(\varrho^2 - R^2)}{2(3+2k)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x \, \partial z}$$

sono finite e continue insieme alle derivate dei due primi ordini in tutti i punti del campo indefinito limitato dalla superficie sferica σ (i punti di σ inclusi), nei punti di questo campo soddisfanno alle equazioni (1) della (I), e nei punti di σ divengono rispettivamente 1, 0, 0; esse quindi possono esprimersi mediante le formole (2)'' della (I).

Ciò premesso, si considerino le formole (2)'' della (I) e, senza fare alcuna ipotesi circa al significato di ξ, η, ζ, supponiamo che *la funzione arbitraria* f_1 *sia finita e continua in tutto il campo di variabilità* σ. Indicato con $f_1^{(0)}$ il valore di f_1 in un punto p_0 preso ad arbitrio su σ e con P_0 un punto qualsiasi esterno alla sfera e situato sul raggio che passa per p_0, si può scrivere, in forza di quanto si è osservato riguardo alle ξ_1, η_1, ζ_1:

$$\xi(P_0) - f_1^{(0)} = \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R}\int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right\} d\sigma + (\xi_1 - 1)\, f_1^{(0)},$$

$$\eta(P_0) = \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R}\int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \times$$
$$\times \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right\} d\sigma + \eta_1\, f_1^{(0)},$$

$$\zeta(P_0) = \frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R}\int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \times$$
$$\times \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right\} d\sigma + \zeta_1\, f_1^{(0)}.$$

I primi termini ai secondi membri di queste formole sono espressioni perfettamente analoghe a quelle studiate nel § precedente; sicchè si può dimostrare anche qui che, data una quantità positiva ε' piccola ad arbitrio e presa per quantità ε del § precedente la quantità $\frac{\varepsilon'}{2}$, si può fissare, indipendentemente dalla scelta del punto p_0, un segmento ϱ_2 finito e maggiore di R, tale che si abbia per $P_0 p_0 \leq \varrho_2 - R$:

$$\left|\frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R}\int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right\} d\sigma\right| < \frac{\varepsilon'}{2},$$
$$\left|\frac{\varrho^2 - R^2}{4\pi R}\int_\sigma (f_1 - f_1^{(0)}) \left\{ \frac{k}{2(2+k)\,\varrho^{t+1}} \int_\infty^\varrho \varrho^t \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{R^2-\varrho^2}{r^3}\right) d\varrho \right\} d\sigma\right| < \frac{\varepsilon'}{2},$$

. . . .

Dalle formole (β) risulta poi che si può fissare una quantità finita e positiva C, in modo che si abbia, ovunque sia il punto P_0,

$$|\xi_1(P_0) - 1| < (\varrho - R)\,C \quad , \quad |\eta_1(P_0)| < (\varrho - R)\,C \quad , \quad |\zeta_1(P_0)| < (\varrho - R)\,C\,;$$

e per conseguenza, posto:

$$|f_1| \leq M \quad , \quad \varrho_2' = R + \frac{\varepsilon'}{2MC}$$

e indicata con ϱ_3 la minore delle due quantità fissate ϱ_2, ϱ_2', risulterà per $P_0 p_0 \leq \varrho_3 - R$:

$$|\xi(P_0) - f_1^{(0)}| < \varepsilon' \quad , \quad |\eta(P_0)| < \varepsilon' \quad , \quad |\zeta(P_0)| < \varepsilon',$$

qualunque sia il punto p_0 preso a considerare su σ. Dopo ciò, ragionando ancora come al § precedente e osservando che le funzioni ξ, η, ζ a distanza infinita si annullano come $\frac{1}{\varrho}$, risulta che *la continuità della funzione* f_1 *è sufficiente, perchè le* (2)″ *della* (I) *valgano a rappresentare le componenti di una deformazione dello spazio indefinito limitato dalla superficie* σ, *corrispondente ai valori arbitrariamente dati* f_1, 0, 0, *di queste componenti nei punti di* σ.

3. Consideriamo ora le formole (15)′ della (II), e, senza fare alcuna ipotesi sul significato di ξ, η, ζ, supponiamo che *la funzione data* F_x *sia finita e continua in tutti i punti della superficie* σ.

Intanto si può osservare che le ξ, η, ζ, date dalle (15)′ della (II), sono funzioni finite e continue dei punti della sfera limitata da σ (i punti di σ inclusi), le loro derivate dei primi tre ordini sono finite e continue in tutti i punti dell'interno di tale sfera (i punti di σ cioè al più esclusi) e sodisfanno alle equazioni (dell'equilibrio) (1) della (II); così basterà verificare se le tre componenti delle corrispondenti tensioni nei punti di σ coincidono rispettivamente con le funzioni arbitrariamente date $F_x, 0, 0$.

Secondo i calcoli della (II), per avere queste tre componenti, bisogna considerare le espressioni: $\frac{U}{R}$, $\frac{V}{R}$, $\frac{W}{R}$ della (II) e calcolare i limiti di queste espressioni quando dai punti dell'interno della sfera si va ai punti di σ.

Le formole (4)′, (12), (12)′ della (II) ci dànno:

$$\frac{U}{R} = \frac{\varphi_1}{R} - \frac{R^2 - \varrho^2}{R\sqrt{3-4m^2}} \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_0^\varrho \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) \frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right) \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}} d\varrho_1$$

$$= \frac{\varphi_1}{R} + \frac{R^2 - \varrho^2}{R\sqrt{3-4m^2}} \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_0^\varrho \left\{ \frac{2m+3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) \right\} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}} d\varrho_1$$

$$= \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma F_x \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}} \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_0^\varrho \left[\frac{2m+3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3}\right) \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}} d\varrho_1 \right\} d\sigma ,$$

$$\frac{V}{R} = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int_\sigma F_x \left\{ \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}} \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_0^\varrho \left[\frac{2m+3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}\left(\frac{R^2 - \varrho^2}{r^3}\right) \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}} d\varrho_1 \right\} d\sigma ,$$

$$\frac{W}{R} = \quad .$$

Queste formole valgono anche a rappresentare un qualunque sistema di integrali delle equazioni $(1)_2$, $(2)_2$ della (II), ammesso che tali integrali siano finiti e continui insieme alle loro derivate dei due primi ordini in tutti i punti della sfera (i punti di σ inclusi); per conseguenza si avrà in particolare:

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{\mathrm{R}^2-\varrho^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma \Big\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\, \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_0^\rho \Big[\frac{2m+3}{2} \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho}\Big) + \\
+ \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \cos\Big(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\Big)\Big] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\mathrm{R}^2-\varrho^2}{r^3}\Big) \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}\, d\varrho_1 \Big\}\, d\sigma\,,
\end{aligned}
$$

$$0 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$0 = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Arrivati a questo punto è facile comprendere che considerazioni perfettamente analoghe a quelle del § 1 valgono a dimostrare che, indicando con p_0 un punto qualsiasi di σ e con P un punto qualsiasi interno alla sfera, si ha:

$$\lim_{\mathrm{P}p_0=0} \frac{\mathrm{U(P)}}{\mathrm{R}} = \mathrm{F}_x(p_0)\quad,\quad \lim_{\mathrm{P}p_0=0} \frac{\mathrm{V(P)}}{\mathrm{R}} = 0\quad,\quad \lim_{\mathrm{P}p_0=0} \frac{\mathrm{W(P)}}{\mathrm{R}} = 0\,,$$

qualunque sia la direzione secondo cui il punto P si avvicina al punto p_0.

Adunque *la continuità della funzione* F_x *è sufficiente, perchè le formole* (15)' *della* (II) *ci diano le componenti della deformazione di una sfera col centro fisso, sulla cui superficie* σ *agiscono le tensioni di componenti* F_x, 0, 0.

4. Ci rimane ora da considerare le formole $(15)_1'$ della (II). Per l'esame di queste formole, dopo di avere osservato che le componenti delle corrispondenti tensioni nei punti di σ sono date dai limiti delle espressioni:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}} = \frac{\varrho^2-\mathrm{R}^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma \mathrm{F}_x \Big\{ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\, \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_\infty^\rho \Big[\frac{2m+3}{2} \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho}\Big) + \\
+ \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \cos\Big(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\Big)\Big] \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\mathrm{R}^2-\varrho^2}{r^3}\Big) \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}\, d\varrho_1 \Big\}\, d\sigma\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}} = \frac{\varrho^2-\mathrm{R}^2}{4\pi\mathrm{R}} \int_\sigma \mathrm{F}_x \Big\{ \frac{1}{\sqrt{3-4m^2}}\, \varrho^{-\frac{2m+3}{2}} \int_\infty^\rho \Big[\frac{2m+3}{2} \operatorname{sen}\Big(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \lg \frac{\varrho_1}{\varrho}\Big) + \\
+ \frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \cos\Big(\frac{\sqrt{3-4m^2}}{2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho}\Big)\Big] \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\Big(\frac{\mathrm{R}^2-\varrho^2}{r^3}\Big) \varrho_1^{\frac{2m+1}{2}}\, d\varrho_1 \Big\}\, d\sigma\,,
\end{aligned}
$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,,$$

quando dai punti del mezzo indefinito limitato da σ si va ai punti di σ, e che le funzioni:

$$U_1 = \frac{R}{\varrho} + \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x^2},$$

$$V_1 = \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x\, \partial y},$$

$$W_1 = \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x\, \partial z}$$

soddisfanno alle equazioni $(1)_2$ della (II) nei punti del mezzo indefinito limitato da σ e nei punti di σ divengono rispettivamente 1, 0, 0 [1], basterà ripetere considerazioni analoghe a quelle del § 2. Adunque anche qui possiamo concludere che *la continuità della funzione* F_x *è sufficiente, perchè le formole* $(15)'_1$ *della* (II) *servano a rappresentare le componenti della deformazione del mezzo indefinito limitato da* σ, *quando nei punti di* σ *agiscono tensioni le cui componenti sono* F_x, 0, 0.

Matematica. — *Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In due Note pubblicate nei Rendiconti dei Lincei (2° sem. 1904) io ho studiato i gruppi (e in particolar modo i gruppi proiettivi) senza trasformazioni infinitesime, accennando alle loro possibili applicazioni alla teoria delle funzioni automorfe [2]. Ma ora si può chiedere: *esistono funzioni* F (automorfe) *uniformi di n variabili* $x_1 \dots x_n$, *trasformate in sè da un gruppo proiettivo* G, *contenente trasformazioni infinitesime?* È ben chiaro che sì: se p. es. con una trasformazione lineare sulle x passiamo a nuove variabili $y_1 \dots y_n$, una funzione F delle $y_1 \dots y_m (m < n)$ è trasformata in sè da tutte quelle proiettività (anche infinitesime), sulle x o sulle y, che trasformano soltanto le $y_{m+1} \dots y_n$. Questo caso ovvio *non è però il solo*: p. es. la funzione $\operatorname{sen}(x_1^2 - 2x_2)$ ammette proiettività infinitesime, senza potersi ridurre (con un cambiamento *proiettivo* di variabili) a dipendere da una variabile

[1] Mediante le funzioni U_1, V_1, W_1 si possono calcolare le componenti della deformazione, corrispondente alle tensioni di componenti 1, 0, 0 nei punti di σ.

[2] Cfr. una mia Memoria di prossima pubblicazione negli « Annali di Matematica ». In questa Memoria sono specialmente studiati i gruppi G *propriamente* discontinui in n variabili x; soltanto in tal caso possono esistere n funzioni delle x, indipendenti tra loro, invariate per G (Cfr. i recenti lavori di Blumenthal nei Math. Annalen).