ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

che le funzioni:

$$U_1 = \frac{R}{\varrho} + \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x^2},$$

$$V_1 = \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x\, \partial y},$$

$$W_1 = \frac{R(\varrho^2 - R^2)}{2(1-m)} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial x\, \partial z}$$

soddisfanno alle equazioni $(1)_2$ della (II) nei punti del mezzo indefinito limitato da σ e nei punti di σ divengono rispettivamente 1, 0, 0 [1], basterà ripetere considerazioni analoghe a quelle del § 2. Adunque anche qui possiamo concludere che *la continuità della funzione* F_x *è sufficiente, perchè le formole* $(15)_1'$ *della* (II) *servano a rappresentare le componenti della deformazione del mezzo indefinito limitato da* σ, *quando nei punti di* σ *agiscono tensioni le cui componenti sono* $F_x, 0, 0$.

Matematica. — *Una questione fondamentale per la teoria dei gruppi e delle funzioni automorfe.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In due Note pubblicate nei Rendiconti dei Lincei (2° sem. 1904) io ho studiato i gruppi (e in particolar modo i gruppi proiettivi) senza trasformazioni infinitesime, accennando alle loro possibili applicazioni alla teoria delle funzioni automorfe [2]. Ma ora si può chiedere: *esistono funzioni* F (automorfe) *uniformi di n variabili* $x_1 \dots x_n$, *trasformate in sè da un gruppo proiettivo* G, *contenente trasformazioni infinitesime?* È ben chiaro che sì: se p. es. con una trasformazione lineare sulle x passiamo a nuove variabili $y_1 \dots y_n$, una funzione F delle $y_1 \dots y_m (m < n)$ è trasformata in sè da tutte quelle proiettività (anche infinitesime), sulle x o sulle y, che trasformano soltanto le $y_{m+1} \dots y_n$. Questo caso ovvio *non è però il solo*: p. es. la funzione $\operatorname{sen}(x_1^2 - 2x_2)$ ammette proiettività infinitesime, senza potersi ridurre (con un cambiamento *proiettivo* di variabili) a dipendere da una variabile

[1] Mediante le funzioni U_1, V_1, W_1 si possono calcolare le componenti della deformazione, corrispondente alle tensioni di componenti 1, 0, 0 nei punti di σ.

[2] Cfr. una mia Memoria di prossima pubblicazione negli « Annali di Matematica ». In questa Memoria sono specialmente studiati i gruppi G *propriamente* discontinui in n variabili x; soltanto in tal caso possono esistere n funzioni delle x, indipendenti tra loro, invariate per G (Cfr. i recenti lavori di Blumenthal nei Math. Annalen).

sola. *Ciò costituisce una prima differenza tra le funzioni automorfe generali e le funzioni più volte periodiche* ([1]). Per evitare ogni ambiguità, noi diremo semidiscontinuo ogni gruppo, che, pur contenendo trasformazioni infinitesime, possiede però soltanto un numero discreto (p. es. finito o numerabile) di trasformazioni (il Fricke lo direbbe discontinuo, con trasformazioni infinitesime). Sono però ben distinti l'ufficio e la natura, che le trasformazioni infinitesime hanno in un gruppo semidiscontinuo, dall'ufficio, che hanno le trasformazioni infinitesime di un gruppo continuo di Lie, che noi chiameremo trasformazioni infinitesime di Lie. La differenza sta in ciò, che le trasformazioni infinitesime di un gruppo semidiscontinuo non bastano per definire il gruppo, e non contengono parametri variabili con continuità.

TEOREMA I. — *Se una funzione* F *di* n *variabili* x *è trasformata in sè da un gruppo* G *proiettivo semidiscontinuo sulle* x, *essa ammette almeno una trasformazione infinitesima di Lie, e perciò ammette proprio un gruppo* Γ *proiettivo continuo di Lie.*

Il teorema reciproco è evidente.

DIMOSTRAZIONE. — Se f è una funzione delle x, indicheremo con $f(\mathrm{A})$ il suo valore in un punto A [come sempre, le x si suppongono coordinate in uno spazio S]; con f'_i indicheremo la $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$; se $u_1, u_2 \dots u_r$ sono r funzioni delle x con $|u_1\, u_2 \dots u_r\,;\, \mathrm{A}_1\, \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_r|$ indicheremo quel determinante di r linee e colonne, in cui $u_i(\mathrm{A}_j)$ è l'*j-esimo* termine della *i-esima* linea $(i, j = 1, 2, \dots r)$. I punti A_j si immaginano naturalmente punti di S. L'annullarsi identico (cioè per qualunque posizione dei punti A) del precedente determinante è condizione necessaria e sufficiente, affinchè le u sieno legate da una relazione lineare a coefficienti costanti. Ora affinchè la F ammetta un gruppo proiettivo continuo, è condizione necessaria e sufficiente che esistano delle costanti a_i, a_{lk}, b_h $(i, l, k, h = 1, 2, \dots n)$ in guisa che sia identicamente

$$\sum_i a_i \mathrm{F}'_i + \sum_{l,k} a_{lk}\, x_l\, \mathrm{F}'_k + \sum_h b_h x_h \sum x_j \mathrm{F}'_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

ossia che le $r = n(n+2)$ funzioni

$$\mathrm{F}'_i\,,\ x_l \mathrm{F}'_k\,,\ x_h \sum x_j \mathrm{F}'_j$$

sieno legate da una relazione a coefficienti costanti, ossia che si abbia identicamente $\Delta = 0$ ([2]) dove

$$\Delta = |\mathrm{F}'_i\,, x_l \mathrm{F}'_k\,, x_h \sum x_j \mathrm{F}'_j\,;\, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_r|$$

([1]) È noto che una funzione uniforme di n variabili x, che ammetta un sistema infinitesimo di periodi, si può, con un cambiamento lineare di variabili, ridurre a dipendere da meno di n variabili: ciò del resto è immediata conseguenza del seguente teorema II, in cui al gruppo H si sostituisca il gruppo delle traslazioni.

([2]) Se Δ fosse di caratteristica s, la F ammetterebbe $r - s$ trasformazioni linearmente indipendenti.

Se dunque la F non ammette un gruppo proiettivo continuo, sarà $\Delta \neq 0$, quando i punti A siano scelti in modo generico tra i punti di regolarità della F. Io dico che in tal caso la F non può ammettere un gruppo semi-discontinuo G. Sia infatti

$$(1)\qquad x'_i = \frac{\sum_k c_{ik}\, x_k + c_{i,n+1}}{\sum c_{n+1,k}\, x_k + c_{n+1,n+1}} \qquad (c_{ik} = \text{cost.})$$

una trasformazione T generica di G. Scriviamola sotto la forma $x'_i = x_i + \delta_i$ ponendo

$$\delta_i = \frac{\sum_k \lambda_{ik}\, x_k + \lambda_{i,n+1} - x_i \sum \lambda_{n+1,k}\, x_k}{\sum_k c_{n+1,k}\, x_k + c_{n+1,n+1}}$$

dove è

$$\lambda_{ik} = c_{ik} \quad (i \neq k) \quad \lambda_{ii} = c_{ii} - c_{n+1,n+1}$$

Dovremo avere

$$(3)\qquad \mathrm{F}(x_i + \delta_i) - \mathrm{F}(x_i) = 0$$

Ora, se G è semidiscontinuo, potremo supporre infinitesima la T, ossia le δ_i piccole a piacere nei punti A. Ma allora la (3) si può scrivere per il punto A_j nel seguente modo:

$$(4)\qquad \sum_i \delta_i(\mathrm{A}_j)\, \overline{\mathrm{F}'_i}(\mathrm{A}_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

dove con $\overline{\mathrm{F}'_i}(\mathrm{A}_j)$ indichiamo una quantità, che si può far differire di quanto poco si vuole dalla $\mathrm{F}'_i(\mathrm{A}_j)$, prendendo la T abbastanza prossima all'identità. Ora Δ è differente da zero, e tale rimarrà, se al posto delle $\mathrm{F}'_i(\mathrm{A}_j)$ poniamo delle quantità φ_{ij}, tali che le $|\varphi_{ij} - \mathrm{F}'_i(\mathrm{A}_j)|$ sieno minori di una certa costante ε. Scegliendo dunque la T in modo che $|\overline{\mathrm{F}'_i}(\mathrm{A}_j) - \mathrm{F}'_i(\mathrm{A}_j)| < \varepsilon$, il determinante $\overline{\Delta}$, che si ricava da Δ, ponendo $\overline{\mathrm{F}'_i}(\mathrm{A}_j)$ al posto di $\mathrm{F}'_i(\mathrm{A}_j)$, sarà ancora differente da zero. Ora la (4) per ciascuno degli r punti A si può scrivere:

$$\sum_i \left[\sum_k \lambda_{ik}\, x_k + \lambda_{i,n+1}\right] \overline{\mathrm{F}'}_i - \sum_k \lambda_{n+1,k} \sum_i x_i\, \overline{\mathrm{F}'}_i = 0$$

Otteniamo così r equazioni lineari omogenee tra le r costanti λ (che non sono tutte nulle, perchè T è differente dall'identità). Dovrebbe quindi essere nullo il determinante $\overline{\Delta}$ di queste equazioni, ciò che è assurdo.

Teorema II. — *Il precedente teorema vale per ogni gruppo* G *anche non proiettivo, purchè esso si possa immaginare contenuto in un gruppo continuo finito* H: *il gruppo* Γ *è in questo caso un sotto gruppo di* H. (Nel caso precedente il gruppo H sarebbe il gruppo generale proiettivo sulle n variabili x).

Sia infatti $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k \left(\text{dove } X_k = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ la più generale trasformazione infinitesima di H. Scritta una trasformazione generica T di G sotto la forma $x'_i = x_i + \delta_i$, varranno ancora le (3) e ancora le δ_i si potranno supporre infinitesime nei punti (A). Le (3) si possono quindi scrivere:

$$(4^{\text{bis}}) \qquad \sum_{k,i} \lambda_k \overline{\xi_{ki}}(A_j)\, \overline{F'_i}(A_j) = 0 \qquad (k, j = 1, 2, \dots r)\ (i = 1, 2, \dots n)$$

dove con $\overline{\xi_{ki}}(A_j)$, $\overline{F'_i}(A_j)$ indichiamo quantità, che differiscono dalle $\xi_{ki}(A_j)$, $F'_i(A_j)$ di quanto poco si vuole. Ponendo poi

$$\varDelta = \left| \sum_i \xi_{1i} F'_i, \dots, \sum \xi_{ri} F'_i ; A_1, A_2, \dots A_r \right| ; \overline{\varDelta} = \left| \sum_i \overline{\xi_{1i}}\, \overline{F'_i}, \dots \sum \overline{\xi_{ri}}\, \overline{F'_i} ; A_1, A_2, \dots, A_r \right|$$

le considerazioni precedenti si possono ripetere quasi letteralmente.

I nostri risultati si possono anche enunciare così:

Teorema III. — *Una funzione* $F(x_1 \dots x_n)$ *uniforme nelle* x, *ammetta un gruppo* G *di trasformazioni in sè stessa; e sia* G *contenuto in un gruppo continuo finito* H *di Lie. Sono possibili questi soli tre casi:*

1° G *è un gruppo senza trasformazioni infinitesime.*

2° G *è un gruppo di Lie, continuo* (naturalmente intransitivo se $F \neq \text{cost}$), *sottogruppo di* H.

3° G *è un gruppo che contiene un numero discreto di schiere di trasformazioni* (¹). G *contiene cioè come sottogruppo un gruppo* Γ *continuo di Lie* (*sottogruppo anche di* H) *naturalmente intransitivo, se* $F \neq \text{cost}$; *inoltre contiene altre trasformazioni* $T_1, T_2, T_3 \dots$ *permutabili con* Γ *e inoltre le trasformazioni, prodotto di una* T *per una trasformazione di* Γ. *Questi prodotti si possono supporre tutti distinti; il prodotto di due trasformazioni* T *è uguale al prodotto di una terza* T *per una trasformazione di* Γ (²).

(¹) Cfr. Lie-Engel, *Transformationgruppen*; 1er Abschnitt; pag. 310, 321 e seg.

(²) Il primo e il secondo caso si possono immaginare come casi particolari dell'ultimo, secondo che si suppone il gruppo Γ, o si suppongono le T ridotte all'identità. Nel caso generale siano $z_1 = \text{cost} \dots z_m = \text{cost.}$ $(m < n)$ le minime varietà invarianti di Γ. Prendiamo come nuove variabili m funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ indipendenti delle z, insieme ad altre $n - m$ funzioni $\varphi_{m-1} \dots \varphi_n$ (indipendenti tra loro e dalle prime) delle x. La F diventerà funzione delle sole $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Nel caso particolare che H sia il gruppo proiettivo, si potrebbe chiedere se le $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ si possono sempre scegliere in modo tale, che le T generino su esse *un gruppo di trasformazioni lineari*. A questa importante, ma assai difficile questione, io ho potuto rispondere solo in casi particolari (Cfr. le pag. e la nota seg.). Sarebbe pure importante sapere se i teoremi I e II *continuano ancora a valere nel caso che* G *sia impropriamente discontinuo, pure non contenendo trasformazioni infinitesime, e nel caso che* H *sia il gruppo delle trasformazioni cremoniane* (*birazionali*): questioni tutte da lasciarsi a ulteriori ricerche.

Al primo di questi tre casi sono dedicati, tra l'altro, i miei lavori più sopra citati, in cui si troveranno pure altre indicazioni bibliografiche. Il secondo corrisponde allo studio dei sottogruppi intransitivi di un gruppo dato H, per cui ci basterà rimandare al citato trattato del Lie. Quanto al terzo caso, qui io mi occuperò soltanto delle funzioni di due variabili x_1, x_2 nel caso che il gruppo H sia il gruppo proiettivo: non riporterò però i calcoli relativi, del resto semplicissimi. Il gruppo Γ essendo intransitivo sarà generato da trasformazioni infinitesime aventi le stesse traiettorie; sia X una di queste trasformazioni (proiettive); con un cambiamento proiettivo di variabili coordinate, noi la potremo supporre ridotta a una delle seguenti forme:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \; x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}, \; \frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \; x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a\,x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (a = \text{cost})$$

Nel primo caso la F non può dipendere che dalla solo x_2 ed è inutile più oltre occuparcene. Nel secondo la F sarà funzione di $z = x_2^2 - 2x_1$ e le T, dovendo trasformare la X o in sè stessa o in una trasformazione con le stesse traiettorie, saranno del tipo $x'_1 = a^2 x_1 + a b x_2 + c$, $x'_2 = ax_2 + b$ (a, b, costanti); esse mutano z in $z' = a^2 z + (b^2 - c)$. La F diventa una funzione di $z = x_2^2 - 2x_1$, che ammette un gruppo di trasformazioni del tipo $z' = kz + h$ (k, h costanti) (¹).

Nel terzo caso la F diventa funzione di $z = x_2 e^{-x_1}$; e le T, come si riconosce tosto, inducono sulle z delle trasformazioni del tipo $z' = kz$ ($k = \text{cost}$).

Nel quarto caso F diventa una funzione di $z = \frac{x^a{}_1}{x_2}$. Introducendo variabili omogenee y_1, y_2, y_3, si ha: $X = \sum \beta_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} (\beta_i = \text{cost}), \sum \beta_i = 0$ (²).

Se $\beta_1 \mp \beta_2 \mp \beta_3 \mp \beta_1$, le T sono (in coordinate non omogenee) del tipo $x'_1 = hx_1$, $x'_2 = kx_2$ (h, k costanti) e inducono sulla z delle trasformazioni del tipo $z' = az$ ($a = \text{cost}$). Se invece $\beta_1 = \beta_2 \mp \beta_3$ la X si può supporre del tipo $x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$; la F diventa funzione di $z = \frac{x_1}{x_2}$ e le T sulla z inducono trasformazioni del tipo $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (α, β, γ, δ costanti).

(¹) Più generalmente nel caso di n variabili, se Γ si riduce al gruppo a un sol parametro generato dalla $\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}$, allora la F diventa funzione delle

$$z_k = x_1^k - n[x_1^{k-2} x_2 - (k-2) x_1^{k-3} x_3 + (k-2)(k-3) x_1^{k-4} x_4 -$$
$$- (k-2)(k-3)(k-4) x_1^{k-5} x_5 + \cdots \pm \frac{\pi(k-2)}{1} x_1 x_{k-1} \mp \pi(k-2) x_k] \; (k = 2, 3 \ldots n)$$

E su queste « $n-1$ » funzioni le T non possono che operare linearmente (Cfr. Nota precedente).

(²) Cfr. Lie-Engel loc. cit. Cap. 27. Risultati analoghi per n qualunque.

In tutti i casi dunque, con un cambiamento (però *non sempre proiettivo*) di variabili, ci riduciamo a *funzioni automorfe di una sola variabile.*

L'estensione al caso di tre variabili non presenta difficoltà, e forse me ne occuperò in un'altra Nota; il caso di n variabili pare assai difficile, per la difficoltà, che presenta la ricerca di tutti i gruppi Γ proiettivi continui in n variabili.

Fisica matematica. — *Sulle funzioni potenziali elicoidali.* Nota di Giuseppe Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

Nello studio di potenziali che si sa essere dipendenti da due sole coordinate, e che quindi conservano valore costante lungo date linee, hanno particolare importanza, come ha dimostrato il prof. Volterra [1], le funzioni potenziali di masse ad una sola dimensione distribuite su queste linee. Tutti i varî tipi di potenziali binari reali sono stati determinati dal prof. T. Levi-Civita [2]; essi si riducono ai seguenti: potenziali cilindrici o logaritmici, potenziali conici che rientrano nel tipo logaritmico, potenziali circolari o simmetrici, potenziali elicoidali, potenziali spirali. Per i due casi dei potenziali logaritmici o simmetrici sono note le corrispondenti funzioni potenziali di masse ad una dimensione distribuite sopra una retta indefinita o sopra una circonferenza [3]. Degli altri casi ha importanza quello dei potenziali elicoidali, potendo interessare di conoscere la funzione potenziale di una massa ad una dimensione distribuita sopra un'elica indefinita; questa ricerca forma oggetto della presenta Nota. Si perviene ad assegnare per essa una espressione in serie distinta in due tipi valevoli, uno per i punti interni al cilindro su cui è tracciata l'elica, l'altro per i punti esterni. Ciò fa perfettamente riscontro a quello che si ha per i potenziali logaritmici, Infatti è noto che per la funzione potenziale di una massa distribuita con la densità lineare k sopra una retta indefinita parallela, per es., all'asse z, si ha

$$\varphi = -2k \log \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos v}\,,$$

riferendoci a coordinate cilindriche ϱ, θ, z, ed avendo indicato con ϱ_1, θ_1 i valori corrispondenti alla retta data e posto $\theta - \theta_1 = v$. Distinguiamo ora i due casi seguenti:

(1) Annali della Scuola normale di Pisa, 1883: *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale.*

(2) Accademia delle Scienze di Torino, 1899: *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate.*

(3) Vedi Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Memorie del l'Acc. delle Scienze, Bologna, S. IV, T. II, 1881.