ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

In tutti i casi dunque, con un cambiamento (però *non sempre proiettivo*) di variabili, ci riduciamo a *funzioni automorfe di una sola variabile*.

L'estensione al caso di tre variabili non presenta difficoltà, e forse me ne occuperò in un'altra Nota; il caso di n variabili pare assai difficile, per la difficoltà, che presenta la ricerca di tutti i gruppi Γ proiettivi continui in n variabili.

Fisica matematica. — *Sulle funzioni potenziali elicoidali*. Nota di Giuseppe Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

Nello studio di potenziali che si sa essere dipendenti da due sole coordinate, e che quindi conservano valore costante lungo date linee, hanno particolare importanza, come ha dimostrato il prof. Volterra (1), le funzioni potenziali di masse ad una sola dimensione distribuite su queste linee. Tutti i varî tipi di potenziali binari reali sono stati determinati dal prof. T. Levi-Civita (2); essi si riducono ai seguenti: potenziali cilindrici o logaritmici, potenziali conici che rientrano nel tipo logaritmico, potenziali circolari o simmetrici, potenziali elicoidali, potenziali spirali. Per i due casi dei potenziali logaritmici o simmetrici sono note le corrispondenti funzioni potenziali di masse ad una dimensione distribuite sopra una retta indefinita o sopra una circonferenza (3). Degli altri casi ha importanza quello dei potenziali elicoidali, potendo interessare di conoscere la funzione potenziale di una massa ad una dimensione distribuita sopra un'elica indefinita; questa ricerca forma oggetto della presenta Nota. Si perviene ad assegnare per essa una espressione in serie distinta in due tipi valevoli, uno per i punti interni al cilindro su cui è tracciata l'elica, l'altro per i punti esterni. Ciò fa perfettamente riscontro a quello che si ha per i potenziali logaritmici, Infatti è noto che per la funzione potenziale di una massa distribuita con la densità lineare k sopra una retta indefinita parallela, per es., all'asse z, si ha

$$\varphi = -2k \log \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos v}\,,$$

riferendoci a coordinate cilindriche ϱ, θ, z, ed avendo indicato con ϱ_1, θ_1 i valori corrispondenti alla retta data e posto $\theta - \theta_1 = v$. Distinguiamo ora i due casi seguenti:

(1) Annali della Scuola normale di Pisa, 1883: *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale*.

(2) Accademia delle Scienze di Torino, 1899: *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate*.

(3) Vedi Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*. Memorie dell'Acc. delle Scienze, Bologna, S. IV, T. II, 1881.

1°. $\varrho < \varrho_1$; si ha allora

$$\varphi = -k \log(\varrho_1 - \varrho e^{iv})(\varrho_1 - \varrho e^{-iv}) = -2k \left\{ \log \varrho_1 - \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n} \frac{\varrho^n}{\varrho_1^n} \cos nv \right\}.$$

2°. $\varrho > \varrho_1$; si ha analogamente

$$\varphi = -2k \left\{ \log \varrho - \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n} \frac{\varrho_1^n}{\varrho^n} \cos nv \right\}.$$

Analoghi sviluppi si possono assegnare, come vedremo, per la funzione potenziale di un'elica indefinita. Come semplice applicazione determino in ultimo la funzione potenziale dell'elettricità indotta in un cilindro circolare indefinito, parallelo all'asse z, da eliche dello stesso parametro, aventi pure per asse l'asse z, interne al cilindro, supponendo le eliche uniformemente elettrizzate, ed il cilindro costituito di sostanza omogenea conduttrice ed in comunicazione con la terra.

1. Riferiamoci a coordinate elicoidali legate alle cartesiane ortogonali dalle relazioni

$$x = \varrho_1 \cos \varrho_3 \; , \quad y = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 \; , \quad z = \varrho_2 + m\varrho_3 \, . \quad (m > 0)$$

Senza danno della generalità possiamo prendere il parametro m uguale ad uno; il campo di variabilità delle $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ essendo allora per ϱ_1 da 0 a ∞, per ϱ_2 da 0 a 2π e per ϱ_3 da $-\infty$ a $+\infty$. Si consideri l'elica indefinita corrispondente ai valori $\varrho'_1 = \mathrm{R}$, $\varrho'_2 = 0$, e si immagini distribuita su di essa, nel tratto compreso fra i punti corrispondenti a $\varrho'_3 = -\theta_1$, $\varrho'_3 = \theta_2$, una massa con la densità lineare costante k. La funzione potenziale corrispondente è

$$\varphi = k \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}}{r} d\varrho'_3 = h \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\varrho'_3}{r} \tag{1}$$

con $h = k\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}$, ed avendo r, distanza del punto potenziato dai punti dell'elica, l'espressione

$$r = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\varrho_3 - \varrho'_3) + (\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho'_3)^2}.$$

Il passaggio, senz'altro, al caso limite di un'elica indefinita non è possibile; si può invece superare la difficoltà in quest'altro modo. Supponendo ancora per un momento finito il tratto dell'elica, si considerino le derivate della φ rispetto a ϱ_1 e ϱ_2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} = -h \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\varrho_1 - \mathrm{R}\cos(\varrho_3 - \varrho'_3)}{r^3} d\varrho'_3$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} = -h \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho'_3}{r^3} d\varrho'_3 \, .$$

Se ora passiamo al caso limite dell'elica indefinita, si riconosce che esse hanno un senso anche quando si estendono i limiti all'infinito, escludendo naturalmente per ϱ_1 e ϱ_2 i valori $\varrho_1 = R$ $\varrho_3 = 0$, ed inoltre esse sono funzioni solo di ϱ_1 e ϱ_2. Infatti posto $\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_3' = \lambda$ si ha

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1} = h\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\varrho_1 - R\cos(\lambda - \varrho_2)}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2})^3}\, d\lambda \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2} = h\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2})^3}\, d\lambda . \end{cases}$$

Ci si può quindi proporre la determinazione della funzione di ϱ_1, ϱ_2 le cui derivate prime coincidono con quelle della φ, la quale resulta così determinata a meno di una costante. Si osservi intanto che

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1} = -h\varrho_1 \Big\{ &\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda + \varrho_2) + \lambda^2})^3} + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2})^3} \Big\} \\ + hR \Big\{ &\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda + \varrho_2)\, d\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda + \varrho_2) + \lambda^2})^3} + \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda - \varrho_2)\, d\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2})^3} \Big\} , \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2} = h \Big\{ &\int_0^{\infty} \frac{\lambda\, d\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda + \varrho_2) + \lambda^2})^3} - \\ &- \int_0^{\infty} \frac{\lambda\, d\lambda}{(\sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1\cos(\lambda - \varrho_2) + \lambda^2})^3} \Big\} , \end{aligned}$$

quindi si riconosce subito come $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1}$ sia funzione pari di ϱ_2, mentre $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}$ è dispari; perciò φ, funzione pari, è, come funzione regolare di ϱ_2, sviluppabile in una serie di coseni. Avremo allora

$$(5)\qquad \varphi = a_0 + \sum_1^{\infty}{}_n\, a_n \cos n\varrho_2 ,$$

essendo le a, dipendenti da ϱ_1, determinate dall'equazioni che si ottengono ricordando che i potenziali binari elicoidali soddisfanno [1] all'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_1} + \left(1 + \frac{1}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_2^2} = 0 .$$

[1] Vedi Levi-Civita, Mem. cit.

Si ottengono per le a le equazioni

$$\frac{d^2a_0}{d\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_1}\frac{da_0}{d\varrho_1}=0\,,$$
$$\frac{d^2a_n}{d\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_1}\frac{da_n}{d\varrho_1^2}-\left(1+\frac{1}{\varrho_1^2}\right)n^2a_n=0\,,$$

delle quali la prima dà intanto $a_0=c_1\log\varrho_1+c_2$, con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. La seconda, posto $\xi=in\varrho_1$, dà

$$\frac{d^2a_n}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{da_n}{d\xi}+\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)a_n=0\,,$$

della quale l'integrale è

$$a_n=p_n\,\mathrm{J}^n(\xi)+q_n\,\mathrm{Y}^n(\xi),$$

essendo $\mathrm{J}^n(\xi)$, $\mathrm{Y}^n(\xi)$ le funzioni cilindriche di Bessel di 1ª e 2ª specie e p_n, q_n costanti. L'espressione per φ viene perciò ad essere

(6) $$\varphi=c_2+c_1\log\varrho_1+\sum_1^\infty{}_n\,\{p_n\,\mathrm{J}^n(in\varrho_1)+q_n\,\mathrm{Y}^n(in\varrho_1)\}\cos n\varrho_2\,;$$

di essa restano ancora da determinare le costanti che vi figurano, ed a questo si può giungere nel seguente modo:

Si osservi che, posto $\mathrm{R}^2+\varrho_1^2+\lambda^2=\tau^2$, si ha sempre, purchè sia $\varrho_1\gtreqless\mathrm{R}$ e qualunque sia ϱ_2, lo sviluppo

$$[\mathrm{R}^2+\varrho_1^2+\lambda^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda+\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=\sum_1^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\,\tau^{-\frac{3}{2}-n}\,2^n\cos^n(\lambda+\varrho_2),$$

ed analogamente

$$[\mathrm{R}^2+\varrho_1^2+\lambda^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda-\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=\sum_0^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\,\tau^{-\frac{3}{2}-n}\,2^n\cos^n(\lambda-\varrho_2).$$

Ora essendo in generale

$$(2\cos\omega)^n=\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}\cos(n-2s)\,\omega\,,$$

avremo

$$[\tau^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda+\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}-[\tau^2-2\mathrm{R}\varrho_1\cos(\lambda-\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$=\sum_1^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\,\tau^{-\frac{3}{2}-n}\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}[\cos(n-2s)(\lambda+\varrho_2)-\cos(n-2s)(\lambda-\varrho_2)]$$
$$=-2\sum_1^\infty{}_n\binom{-\frac{3}{2}}{n}(-1)^n(\mathrm{R}\varrho_1)^n\,\tau^{-\frac{3}{2}-n}\sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}\operatorname{sen}(n-2s)\,\lambda\cdot\operatorname{sen}(n-2s)\,\varrho_2\,;$$

quindi poichè

$$\sum_{s=0}^{s=2k}\binom{2k}{s}\operatorname{sen}2(k-s)\lambda\cdot\operatorname{sen}2(k-s)\varrho_2=2\sum_{s=0}^{s=k}\binom{2k}{s}\operatorname{sen}2(k-s)\lambda\cdot\operatorname{sen}2(k-s)\varrho_2$$

$$\sum_{s=0}^{s=2k+1}\binom{2k+1}{s}\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\lambda\cdot\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\varrho_2=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=k}\binom{2k+1}{s}\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\lambda\cdot\operatorname{sen}[2(k-s)+1]\varrho_2$$

si ha infine

$$(7)\qquad [\tau^2-2R\varrho_1\cos(\lambda+\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}-[\tau^2-2R\varrho_1\cos(\lambda-\varrho_2)]^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=-4\sum_1^\infty{}_n\operatorname{sen}n\varrho_2\cdot\operatorname{sen}n\lambda\sum_0^\infty{}_s\binom{-\frac{3}{2}}{2s+n}(-1)^{2s+n}\binom{2s+n}{s}(R\varrho_1)^{2s+n}\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}.$$

Uguagliamo le due espressioni per $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_2}$ che si hanno dalla (6) e dalla (4), e tenendo conto della precedente (7) otteniamo:

$$\sum_1^\infty{}_n\, n\,\{p_n\,J^n(in\varrho_1)+q_n\,Y^n(in\varrho_1)\}\operatorname{sen}n\varrho_2=$$

$$=4h\sum_1^\infty{}_n\operatorname{sen}n\varrho_2\sum_0^\infty{}_s(-1)^{2s+n}\binom{-\frac{3}{2}}{2s+n}\binom{2s+n}{s}(R\varrho_1)^{2s+n}\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda.$$

Da questa si ricava

$$(8)\qquad n\,\{p_n\,J^n(in\varrho_1)+q_n\,Y^n(in\varrho_1)\}=$$

$$=4h\sum_0^\infty(-1)^{2s+n}\binom{-\frac{3}{2}}{2s+n}\binom{2s+n}{s}(R\varrho_1)^{2s+n}\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda.$$

Ricordando che è in generale [1]

$$\operatorname{sen}x=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J^{\frac{1}{2}}(x)$$

abbiamo

$$\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\int_0^\infty\frac{J^{\frac{1}{2}}(n\lambda)\cdot\lambda^{\frac{1}{2}+1}\,d\lambda}{(\lambda^2+R^2+\varrho_1^2)^{\frac{1}{2}+2s+n+1}},$$

quindi per una notevole formola di Sonin [2] otteniamo

$$\int_0^\infty\tau^{-\frac{3}{2}-2s-n}\lambda\operatorname{sen}n\lambda\cdot d\lambda=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\,\frac{\pi i(n)^{\frac{1}{2}+2s+n}\left(i\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right)^{-2s-n}H_1^{-2s-n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right)}{2^{\frac{3}{2}+2s+n}\,\Gamma(\frac{3}{2}+2s+n)},$$

[1] Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen*, Leipzig, 1904, pag. 7.
[2] Vedi Nielsen, pag. 221.

nella quale formola le H_1^{-2s-n} indicano le funzioni cilindriche di terza specie o funzioni di Hankel. Ad essa poichè [1]

$$H_1^{-r} = e^{r\pi i} H_1^r = e^{r\pi i} \{J^r + i Y^r\}$$

si può dare l'altra forma più semplice

$$\int_0^\infty \tau^{-\frac{3}{2}-2s-n} \lambda \operatorname{sen} n\lambda \cdot d\lambda =$$

$$= \frac{\pi 2^{2s+n-1} \Gamma(2s+n+1) (n)^{2s+n+1} e^{(2s+n+1)\frac{\pi i}{2}}}{\Gamma(4s+2n+2) \left(\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right)^{2s+n}} H_1^{2s+n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right).$$

ed in conseguenza la (8) si può scrivere

$$(9) \qquad n\{p_n J^n(in\varrho_1) + q_n Y^n(in\varrho_1)\} =$$

$$= 4h\pi \sum_0^\infty {}_s \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{2s+n+1} \left(\frac{R\varrho_1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}\right)^{2s+n} e^{(2s+n+1)\frac{\pi i}{2}} H_1^{2s+n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right).$$

Avendo sempre supposto $\varrho_1 \gtreqless R$ è necessario ora considerare distintamente i due casi in cui è $\varrho_1 > R$ o $\varrho_1 < R$.

Si supponga dapprima $\varrho_1 < R$: allora anche per i punti dell'asse del cilindro su cui è tracciata l'elica, cioè per $\varrho_1 = 0$, resta $\frac{1}{r}$ finita insieme alle sue derivate, e così pure restano regolari la φ e le sue derivate. Dovremo quindi prendere le $q_n = 0$ onde escludere le funzioni cilindriche di 2ª specie che sono singolari in $\varrho_1 = 0$, e così pure dovremo fare $c_1 = 0$: la (9) ci dà allora

$$n p_n J^n(in\varrho_1) =$$

$$= 4h\pi \sum_0^\infty {}_s \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{2s+n+1} \left(\frac{R\varrho_1}{\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}\right)^{2s+n} e^{(2s+n+1)\frac{\pi i}{2}} H_1^{2s+n}\left(in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}\right).$$

Dividendo i due membri per ϱ_1^n e passando al limite per $\varrho_1 = 0$ otteniamo

$$n p_n \cdot \lim_{\varrho_1=0} \left[\frac{J^n(in\varrho_1)}{\varrho_1^n}\right] = 4h\pi \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} e^{(n+1)\frac{\pi i}{2}} H_1^n(inR)$$

e poichè

$$\lim_{\varrho_1=0} \left[\frac{J^n(in\varrho_1)}{\varrho_1^n}\right] = \frac{(in)^n}{2^n \Gamma(n+1)}$$

abbiamo finalmente

$$p_n = 2h\pi i H_1^n(inR)$$

onde l'espressione della φ viene ad essere

$$(10) \qquad \varphi = c_2 + 2h\pi \sum_1^\infty {}_n i H_1^n(inR) J^n(in\varrho_1) \cos n\varrho_2$$

valevole per $\varrho_1 < R$ qualunque sia ϱ_2.

[1] Vedi Nielsen, pag. 16.

Va osservato che la formola precedente è solo apparentemente complicata di immaginari, giacchè per le espressioni di $J^n(in\varrho_1)$ e di $H_1^n(in R)$ si sa ([1]) che per n dispari sono i $J^n(in\varrho_1)$ ed $H_1^n(in R)$ reali, per n pari lo sono invece $J^n(in\varrho_1)$ ed $iH_1^n(in R)$. La (10) mostra per $\varrho_1 = 0$ che la costante c_2 non è altro che il valore costante della funzione potenziale dell'elica per i punti dell'asse del cilindro su cui essa è tracciata, cioè:

$$c_2 = h \int \frac{d\varrho_3'}{\sqrt{R^2 + (z-\varrho_3')^2}},$$

l'integrale essendo esteso fra limiti infiniti; esso coincide con il valore della funzione potenziale dell'asse z per i punti da lui distanti di R, onde si ha

$$c_2 = -2h \log R.$$

Otteniamo quindi in conclusione, a meno di una costante,

$$\varphi = -2h \left\{ \log R - \pi \sum_1^\infty i\, H_1^n(inR)\, J^n(in\varrho_1) \cos n\varrho_2 \right\}. \tag{11}$$

Supponiamo ora $\varrho_1 > R$; fissato ϱ_1 consideriamo R variabile, sempre però minore di ϱ_1; la funzione potenziale della corrispondente elica indefinita dovrà essere in R dello stesso tipo che in ϱ_1, data la sua simmetria in R e ϱ_1: dovrà essere regolare per $R = 0$, coincidendo allora con la funzione potenziale dell'asse z; abbiamo quindi per essa l'espressione

$$\varphi = -2h \left\{ \log \varrho_1 - \pi \sum_1^\infty i\, H_1^n(in\varrho_1)\, J^n(inR) \cos n\varrho_2 \right\}. \tag{12}$$

Quando in luogo di considerare $m = 1$ si considerano eliche di parametro qualunque $m > 0$, e corrispondenti ad un valore qualunque ϱ_2' compreso fra 0 e $2\pi m$, i limiti inclusi, le formole a cui si arriva sono

$$\varphi = -\frac{2h}{m} \left\{ \log R - \pi \sum_1^\infty {}_n\, i\, H_1^n\left(\frac{inR}{m}\right) J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \cos \frac{n(\varrho_2 - \varrho_2')}{m} \right\}, \text{ per } \varrho_1 < R \tag{13}$$

$$\varphi = -\frac{2h}{m} \left\{ \log \varrho_1 - \pi \sum_1^\infty {}_n\, i\, H_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) J^n\left(\frac{inR}{m}\right) \cos \frac{n(\varrho_2 - \varrho_2')}{m} \right\}, \text{ per } \varrho_1 > R \tag{14}$$

con $h = k\sqrt{R^2 + m^2}$.

2. Si consideri un cilindro circolare di raggio R avente per asse l'asse z, indefinitamente esteso e costituito di sostanza omogenea conduttrice; internamente ad esso siano v eliche indefinite, di parametro m, su cui sia distribuita una massa elettrica ad una dimensione, di cui la densità lineare, costante per ogni elica, sia k_s. Facendo uso delle coordinate elicoidali, le eliche date corrispondano ai valori $\varrho_{1s} = R_s$, $\varrho_{2s} = \alpha_s$; allora, indicando con φ_s la funzione potenziale di ogni elica, sarà $V = \sum_1^v {}_s\, \varphi_s$ quella resultante, e per

([1]) Vedi Nielsen, pag. 152.

i punti esterni a tutte le eliche avremo per la (14)

$$V = -\sum_1^v {}_s \frac{2k_s \sqrt{R_s^2+m^2}}{m} \left\{ \log \varrho_1 - \pi \sum_1^\infty {}_n i\, H_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) J^n\left(\frac{inR_s}{m}\right) \cos\frac{n}{m}(\varrho_2 - \alpha_s) \right\}.$$

All'elettricità indotta sulla superficie σ del cilindro corrisponde una funzione potenziale W, per la quale si dovrà avere nell'interno del cilindro $\Delta_2 W = 0$ e sopra σ, supponendo il cilindro in comunicazione con la terra, $W + V = 0$; all'esterno del cilindro è naturalmente $W + V = 0$. È assai facile determinare la funzione potenziale W dell'elettricità indotta anche per i punti interni al cilindro.

Si osservi intanto che per la proprietà caratteristica del potenziale inducente è W funzione solo di ϱ_1 e ϱ_2; come funzione potenziale di superficie è sempre finita e continua anche nel passare da una parte all'altra della superficie stessa. Quindi come funzione regolare di $\frac{\varrho_2}{m} = \theta$ essa è sviluppabile in serie di Fourier, ossia rappresentabile nella forma

$$W = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) = a_0 + \sum_1^\infty \left(a_n \cos\frac{n}{m}\varrho_2 + b_n \operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2\right),$$

essendo le a funzioni di ϱ_1.

Dovendo soddisfare al $\Delta_2 W = 0$, che si riduce all'equazione dei potenziali elicoidali

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial W}{\partial \varrho_1} + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial \varrho_2^2} = 0,$$

si deve avere, come si è visto precedentemente,

$$a_0 = c_1 \log \varrho_1 + c_2$$

$$a_n = p_n J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + q_n Y^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right),$$

$$b_n = p'_n J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + q'_n Y^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right),$$

con $c_1, c_2, p_n, p'_n, q_n, q'_n$ costanti.

Ma la sua regolarità anche per $\varrho_1 = 0$ esige che sia $c_1 = 0$, $q_n = 0$, $q'_n = 0$, onde si ha per W l'espressione

$$W = c_2 + \sum_1^\infty {}_n \left(p_n \cos\frac{n}{m}\varrho_2 + p'_n \operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2\right) J^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right).$$

Restano a determinare le costanti c_2, p_n, p'_n; ma a questo si arriva subito tenendo conto della condizione in superficie. Si deve avere, infatti, per la (14) e per $\varrho_1 = R$,

$$(15) \quad c_2 + \sum_1^\infty {}_n \left(p_n \cos\frac{n}{m}\varrho_2 + p'_n \operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2\right) J^n\left(\frac{inR}{m}\right) =$$
$$= \sum_1^v {}_s \frac{2k_s \sqrt{R_s^2+m^2}}{m} \left\{ \log R - \pi \sum_1^\infty {}_n i\, H_1^n\left(\frac{inR}{m}\right) J^n\left(\frac{inR_s}{m}\right) \cos\frac{n}{m}(\varrho_2 - \alpha_s) \right\},$$

da cui si ricava, eguagliando i coefficienti di $\cos\frac{n}{m}\varrho_2$, $\operatorname{sen}\frac{n}{m}\varrho_2$:

$$c_2 = 2\log \mathrm{R}\sum_{1}^{v}{}_s \frac{k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m},$$

$$p_n = \frac{2\pi i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}{\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}\sum_{1}^{v}{}_s \frac{k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\,\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)\cos\frac{n}{m}\alpha_s;$$

$$p'_n = -\frac{2\pi i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}{\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}\sum_{1}^{v}{}_s \frac{k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\,\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)\operatorname{sen}\frac{n}{m}\alpha_s,$$

onde l'espressione di W per i punti interni al cilindro diviene

$$\mathrm{W} = \sum_{1}^{v}{}_s \frac{2k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\left\{\log\mathrm{R} - \pi\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)}{\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right)}\mathrm{J}^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\cos\frac{n}{m}(\varrho_2-\alpha_s)\right\}. \tag{16}$$

Per i punti esterni al cilindro si ha invece

$$\mathrm{W} = -\mathrm{V} = \sum_{1}^{v} \frac{2k_s\sqrt{\mathrm{R}_s^2+m^2}}{m}\left\{\log\varrho_1 - \pi\sum_{1}^{\infty} i\,\mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}_s}{m}\right)\cos\frac{n}{m}(\varrho_2-\alpha_s)\right\}, \tag{17}$$

coincidendo naturalmente le due espressioni per $\varrho_1 = \mathrm{R}$.

Fisica. — *Intorno ad alcuni semplici strumenti per l'esatta verificazione dell'ora.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. Allorchè si determina l'istante del mezzogiorno vero locale o in generale quello del passaggio d'una stella al meridiano col metodo delle altezze corrispondenti e facendo uso del sestante, si può (come è noto e trovasi indicato nei trattati di Astronomia e di Navigazione) fissare gli specchi del sestante in una posizione conveniente e poi giunto il tempo opportuno, orientare ed inclinare il cannocchiale in modo che nel suo campo si trovino le due immagini della stella prodotte l'una per riflessione sugli specchi, l'altra sull'orizzonte artificiale (oppure la stella e l'orizzonte naturale) ed attendere che le due immagini coincidano e ripeter poi l'operazione quando la stella trovasi dall'altro lato del meridiano. Il contatto delle due immagini avviene quando l'altezza della stella sull'orizzonte è uguale all'angolo degli specchi (o al doppio di quest'angolo se ci si riferisce all'orizzonte naturale), e la media dell'ora esatta dei due contatti nel tempo dell'orologio dà l'ora esatta