ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

nitroso: la loro somma è sempre costante. Altri metodi di formazione dei composti diazoici non si possono immaginare; e se anche un giorno si riuscisse p. e. a preparare un nuovo prodotto di ossidazione dell'anilina, ciò che è assai problematico, resterebbe sempre a scoprire anche il corrispondente termine di riduzione dell'acido nitroso, tale che soddisfaccia alla condizione sopra enunciata.

Gli altri metodi che in casi speciali vengono seguiti nella preparazione di taluni composti diazoici, rientrano nella cerchia di quelli descritti ed appartengono quasi tutti, per quanto artificiosi si presentino, a quello che Griess scoperse per il primo.

Fisica matematica. — *Intorno ai problemi dell'equilibrio elettrico e dell'induzione magnetica.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Consideriamo uno spazio finito S, limitato dalla superficie σ, che supporremo ammetta in ogni suo punto un piano tangente unico, e due raggi di curvatura finiti e diversi da zero: la superficie σ è dunque, per ipotesi, convessa.

Sia φ il potenziale di una massa distribuita sulla superficie σ con densità h, ovunque finita e continua: la derivata di φ rispetto alla normale interna n in un punto qualunque A di σ, è espressa dalla formola:

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\mathrm{A}} = -2\pi h(\mathrm{A}) + \int_\sigma \frac{\cos\theta}{r^2}\, h\, d\sigma ,$$

ove $h(\mathrm{A})$ denota il valore di h nel punto A, $d\sigma$ l'elemento di superficie attiguo ad un punto variabile A', r la distanza AA', θ l'angolo che la direzione AA' forma con la normale n nel punto A.

Supponiamo che lo spazio S sia occupato da un corpo conduttore dell'elettricità, carico di una massa E, e che nello spazio esterno si trovino altre masse, comunque distribuite ma fisse, il cui potenziale diremo ψ.

Per ottenere la densità corrispondente allo stato d'equilibrio della massa E sulla superficie del conduttore, occorre determinare una funzione h, finita e continua in tutti i punti di σ, che verifichi l'equazione $\int_\sigma h\, d\sigma = \mathrm{E}$, e tale che in un punto qualunque A di σ si abbia:

$$(2)\qquad 2\pi h(\mathrm{A}) = \int_\sigma \frac{\cos\theta}{r^2}\, h\, d\sigma + \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\mathrm{A}} ;$$

giacchè allora, detto φ il potenziale della massa E, distribuita sulla superficie σ con densità h, sarà per le formole (1) e (2):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_A + \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_A = 0,$$

ossia, in un punto qualunque di σ, $\frac{\partial}{\partial n}(\varphi+\psi)=0$; quindi, nello spazio S, $\varphi+\psi=\text{cost}$: e questa è appunto la condizione d'equilibrio.

Se non esistono masse esterne $(\psi=0)$ dovrà aversi, detta allora e la densità:

$$2\pi e(\mathrm{A}) = \int_\sigma \frac{\cos\theta}{r^2}\, e\, d\sigma. \tag{3}$$

Da questa formola il Robin, ammettendo l'esistenza della funzione e, ne ha dedotto un'espressione notevole. Per semplicità noi porremo:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} = \mathrm{V},$$

onde la formola (3) si potrà scrivere

$$e(\mathrm{A}) = \int_\sigma \mathrm{V} e\, d\sigma. \tag{4}$$

Sia f una funzione sottoposta alle sole condizioni d'esser finita e continua in tutti i punti di σ, e di verificare l'equazione:

$$\int_\sigma f\, d\sigma = \int_\sigma e\, d\sigma = \mathrm{E}. \tag{5}$$

Costruiamo successivamente le funzioni f_1, f_2, ecc., definite in un punto qualunque A di σ dalle formule

$$f_1(\mathrm{A}) = \int_\sigma \mathrm{V} f\, d\sigma\ , \ f_2(\mathrm{A}) = \int_\sigma \mathrm{V} f_1\, d\sigma\ , \text{ ecc.} \tag{6}$$

Qualunque sia la primitiva funzione f, si ha:

$$\lim_{n=\infty} f_n = e \text{ [1]}. \tag{7}$$

[1] G. Robin, *Distribution de l'Électricité sur une surface fermée convexe.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CIV, pp. 1834 a 1887.

Per arrivare a questa formula il Robin dimostra da prima, che la differenza fra il massimo ed il minimo valore del rapporto $\frac{f_n}{e}$ tende verso zero. Poi fa vedere che il rapporto $\frac{f_n}{e}$ tende esso stesso verso un limite in ogni punto di σ. Ne viene di conseguenza che $\frac{f_n}{e}$ tende verso una certa costante k, ossia che

$$\lim_{n=\infty} f_n = ke. \tag{8}$$

Il Robin osserva che se la funzione f ha lo stesso segno in tutti i punti di σ, non può essere $k=0$. Ma poi dimostra che per qualunque valore di n si ha:

$$\int_\sigma f_n\, d\sigma = \int_\sigma f\, d\sigma; \tag{9}$$

quindi per la formola (5), sarà $\int_\sigma f_n\, d\sigma = \int_\sigma e\, d\sigma$, e perciò $k=1$: onde la formula (8) si ridurrà alla (7).

Nella prima parte della sua dimostrazione il Robin, seguendo il metodo di Carlo Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet, divide la superficie σ in due gruppi di regioni: un primo gruppo corrispondente ai punti nei quali il rapporto $\frac{f}{e}$ è minore della media aritmetica M tra il suo minimo ed il suo massimo valore; ed un secondo gruppo corrispondente ai punti nei quali $\frac{f}{e}$ è maggiore di M. Se esistono delle regioni ove $\frac{f}{e}$ sia uguale ad M, esse possono attribuirsi indifferentemente all'uno o altro gruppo.

Come ha osservato il prof. Volterra, questa divisione della superficie σ (divisione che deve poi ripetersi per tutti i successivi rapporti $\frac{f_1}{e}, \frac{f_2}{e}$, ecc.) può presentare delle difficoltà, d'altronde superabili [1].

Nella presente Nota faccio vedere come si può arrivare alla formula (7), seguendo in sostanza la via tracciata dal Robin, ma con un procedimento più semplice e del tutto rigoroso (per il quale non si richiede la divisione della sup. σ, a cui accenno sopra). Questo procedimento, al pari di quello del Robin, suggerisce poi le note formule di risoluzione dell'equazione (2), e di un'altra più generale relativa al problema dell'induzione magnetica.

Io dovrò ammettere col Robin l'*esistenza* della funzione e che verifica l'equazione (3). Ricorrendo al metodo del Neumann, sopra menzionato, si

[1] Volterra, *Sul principio di Dirichlet*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XI, a. 1897.

può ritrovare l'espressione di e data dal Robin, senza presupporne l'esistenza: ma il procedimento è allora più complicato [1]. Il metodo del Robin, colle lievi modificazioni che vi apporto in questa Nota, presenta il vantaggio di risolvere i problemi fondamentali dell'Elettrostatica e del Magnetismo nel modo più semplice, e per una vasta classe di corpi: per tutti quelli, cioè, la cui superficie σ soddisfa le condizioni poste in principio, e pei quali si può, in un modo qualunque, assicurasi dell'esistenza di e [2].

2. In virtù dell'ipotesi fatta sulla superficie σ, che essa ammetta in ogni suo punto due raggi di curvatura finiti, esisterà una quantità *finita* D tale che una sfera di diametro D, tangente alla superficie σ in un suo punto qualunque A, e situata, rispetto al piano tangente, della stessa parte di σ, contenga l'intera superficie σ nel suo interno. Da semplici considerazioni geometriche risulta immediatamente che per qualunque posizione del punto A' sopra σ, sarà $\frac{\cos\theta}{r} \gtrless \frac{1}{\mathrm{D}}$ $(r = \mathrm{AA}', \theta = \widehat{\mathrm{AA}', n})$. Dunque il rapporto $\frac{\cos\theta}{r}$ ammetterà un limite inferiore λ_0, *maggiore di zero.*

In modo analogo si vedrebbe che caso dovrà ammettere un limite superiore λ_1, *finito*.

La quantità $\mathrm{V} = \frac{1}{2\pi r}\,,\ \frac{\cos\theta}{r}$ ammetterà un limite inferiore V_0 *maggior di zero*, giacchè r ammette certamente un limite superiore *finito*.

La densità $e(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\cos\theta}{r^2}\, e\, d\sigma$ sarà ovunque compresa fra

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\int_\sigma \frac{e\, d\sigma}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1}{2\pi}\int_\sigma \frac{e\, d\sigma}{r}$$

(ricordiamo che e ha per tutto lo stesso segno), ossia fra $\frac{\lambda_0}{2\pi}\mathrm{P}$ e $\frac{\lambda_1}{2\pi}\mathrm{P}$, ove P denota il potenziale dovuto alla massa E in equilibrio; ovvero, tra $\frac{\lambda_0}{2\pi\mathrm{C}}\mathrm{E}$ e $\frac{\lambda_1}{2\pi\mathrm{C}}\mathrm{E}$, ove C rappresenta la *capacità* $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{P}}$ del conduttore, quantità *finita e maggiore di zero.*

Da ciò segue che il rapporto $\frac{e}{\mathrm{E}}$ ammetterà un limite inferiore α_0 *maggiore di zero*, ed un limite superiore α_1 *finito*.

3. Ciò premesso, osserviamo che per dimostrare la formula (7) basterà provare che se g è una funzione finita e continua in tutti i punti di σ, la

[1] Vedi, p. es., Poincaré, *Théorie du Potentiel*

[2] È ben noto che si possono costruire infinite superficie σ, per le quali e si sa determinare.

quale verifichi l'equazione $\int_\sigma g\,d\sigma = 0$, e costruiamo le funzioni g_1, g_2, ecc., applicando successivamente la formula

$$(10) \qquad g_{n+1}(\mathrm{A}) = \int_\sigma \mathrm{V} g_n\,d\sigma\ ,\ (n = 0\,,1\,,2\ldots;\, g_0 = g)$$

analoga alle (6), si avrà

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} g_n = 0\,.$$

Infatti, supponendo dimostrata questa formula, prendiamo $g = f - e$: la condizione $\int_\sigma g\,d\sigma = 0$ sarà soddisfatta in virtù della formula (5). Avremo poi:

$$g_1(\mathrm{A}) = \int_\sigma \mathrm{V} g\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{V} f\,d\sigma - \int_\sigma \mathrm{V} e\,d\sigma = f_1(\mathrm{A}) - e(\mathrm{A}),$$

vale a dire, in tutti i punti di σ, $g_1 = f_1 - e$. Analogamente si troverebbe $g_2 = f_2 - e$, ecc.; e in generale: $g_n = f_n - e$. Sarà quindi, per la formula (11), $\lim\limits_{n=\infty} (f_n - e) = 0$, ossia $\lim\limits_{n=\infty} f_n = e$, il che appunto vogliamo provare.

4. Le funzioni g_n soddisfanno l'equazione $\int_\sigma g_n\,d\sigma = \int_\sigma g\,d\sigma = 0$, che rientra, come caso particolare, nella (9). Ciò può dimostrarsi col procedimento indicato dal Robin, od anche nel modo seguente.

Se G è il potenziale di una massa distribuita sulla superficie σ con densità uguale a g, in un suo punto qualunque A si avrà:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n} &= -2\pi g(\mathrm{A}) + \int_\sigma \frac{\cos\theta}{r^2}\, g\,d\sigma = \\ &= -2\pi\left\{ g(\mathrm{A}) - \int_\sigma \mathrm{V} g\,d\sigma \right\} = -2\pi \left\{ g(\mathrm{A}) - g_1(\mathrm{A}) \right\}.\end{aligned}$$

Poichè $\int_\sigma \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}\,d\sigma = 0$, sarà:

$$\int_\sigma \left\{ g(\mathrm{A}) - g_1(\mathrm{A}) \right\} d\sigma = 0,$$

ossia

$$\int_\sigma g_1\,d\sigma = \int_\sigma g\,d\sigma = 0\,.$$

E analogamente:

$$\int_\sigma g_2\, d\sigma = 0\,, \ldots, \int_\sigma g_n\, d\sigma = 0\,; \quad \text{c. v. d.}$$

5. In virtù di questa formula l'equazione (10) si potrà scrivere:

$$g_{n+1}(\mathrm{A}) = \int_\sigma \mathrm{V} g_n\, d\sigma - \mathrm{V}_0 \int_\sigma g_n\, d\sigma = \int_\sigma (\mathrm{V} - \mathrm{V}_0)\, g_n\, d\sigma\,,$$

(V_0 denotando il limite inferiore di V); od anche:

$$g_{n+1}(\mathrm{A}) = \int_\sigma (\mathrm{V} - \mathrm{V}_0) \frac{g_n}{e} \,.\, e\, d\sigma\,.$$

Per semplicita supponiamo $\mathrm{E} > 0$, quindi, in tutti i punti di σ, $e > 0$. Se μ_n è il massimo valore assoluto del rapporto $\frac{g_n}{e}$, avremo:

$$|g_{n+1}(\mathrm{A})| \leqq \mu_n \int_\sigma (\mathrm{V} - \mathrm{V}_0)\, e\, d\sigma\,.$$

Ma:

$$\int_\sigma (\mathrm{V} - \mathrm{V}_0)\, e\, d\sigma = \int_\sigma \mathrm{V} e\, d\sigma - \mathrm{V}_0 \int_\sigma e\, d\sigma = e(\mathrm{A}) - \mathrm{V}_0 \mathrm{E} = e(\mathrm{A}) \left\{ 1 - \frac{\mathrm{V}_0 \mathrm{E}}{e(\mathrm{A})} \right\}$$

$$\leqq e(\mathrm{A}) \left\{ 1 - \frac{\mathrm{V}_0}{\alpha_1} \right\},$$

ove α_1 rappresenta il limite superiore del rapporto $\frac{e}{\mathrm{E}}$ (§ 2). Quindi, posto $1 - \frac{\mathrm{V}_0}{\alpha_1} = p$:

$$\left| \frac{g_{n+1}(\mathrm{A})}{e(\mathrm{A})} \right| \leqq p \mu_n\,,$$

e per conseguenza, detto μ_{n+1} il massimo valore assoluto di $\frac{g_{n+1}}{e}$:

$$\mu_{n+1} \leqq p \mu_n\,. \tag{12}$$

Ora la costante p è positiva, come risulta da questa stessa formula: ed è minore dell' unità: dunque μ_n tende a zero col crescere di n; perciò tenderà a zero, in tutti i punti di σ, il rapporto $\frac{g_n}{e}$, e quindi ancora g_n.

Resta così dimostrata la formula (11), e per conseguenza la (7).

6. Veniamo ora al problema dell' induzione magnetica. Come caso particolare, otterremo la soluzione dell' equazione (2).

Lo spazio S sia occupato da un corpo capace di magnetizzarsi, e si trovi in presenza di date masse magnetiche. Sia ψ il loro potenziale. Proponiamoci di determinare il potenziale φ del magnetismo indotto.

Esso deve presentare tutti i caratteri del potenziale di una massa distribuita con continuità sulla superficie σ del corpo, e in ogni punto A di σ verificare l'equazione:

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{A} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)_{A} = (1-\mu)\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{A},$$

ove n denota la normale interna, n' la normale esterna, μ la *permeabilità magnetica* del corpo, che riteniamo costante.

Ponendo:

$$a = \frac{\mu - 1}{\mu + 1},$$

l'equazione precedente si potrà scrivere:

$$(1+a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{A} + (1-a)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)_{A} = -2a\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{A}. \tag{13}$$

Se consideriamo φ come il potenziale di una massa distribuita sulla superficie σ con densità h avremo:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{A} = -2\pi h(A) + 2\pi\int_{\sigma} Vh\,d\sigma\,,\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)_{A} = -2\pi h(A) - 2\pi\int_{\sigma} Vh\,d\sigma;$$

onde, sostituendo nell'equazione (13), a $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{A}$ e $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)_{A}$, queste loro espressioni, e risolvendo rispetto ad $h(A)$, otteremo l'equazione funzionale:

$$h(A) = a\left\{\int_{\sigma} Vh\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{A}\right\}, \tag{14}$$

che deve essere verificata dalla funzione h.

Per ottenere h, poniamo $g = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial n}$, e costruiamo successivamente le funzioni g_1, g_2, ecc., mediante la formola (10).

La condizione $\int_{\sigma} g\,d\sigma = 0$ è soddisfatta, giacchè $\int_{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,d\sigma = 0$, ψ essendo il potenziale di masse esterne. Varrà per conseguenza la formula (12). Da ciò segue che la serie $\sum_{0}^{\infty}\frac{g_n}{e}$ è uniformemente convergente. Lo stesso avverrà della serie $\sum_0^\infty g_n$, e, a maggior ragione, della serie $\sum_0^\infty a^{n+1} g_n$: infatti la permeabilità magnetica μ è sempre positiva, quindi la costante a sarà, in valore assoluto, minore dell'unità.

Pongasi allora:

$$h = \sum_0^\infty a^{n+1} g_n \, . \qquad \left(g_0 = g = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)$$

Tenendo conto della formula (10), si riconosce immediatamente che la funzione h, così espressa, verifica l'equazione (14) ([1]).

7. Se facciamo $a = 1$, l'equazione (14) si riduce alla (2), la quale sarà perciò verificata se si pone $h = \sum_0^\infty g_n$ ([2]).

Si avverta che essendo, per qualunque valore di n, $\int_\sigma g_n \, d\sigma = 0$, sarà anche $\int_\sigma h \, d\sigma = 0$. Avremo dunque risoluta l'equazione (2) nell'ipotesi che il conduttore non contenga alcuna carica. Se esso contiene una carica E, dovremo aggiungere ad h la densità e corrispondente alla distribuzione naturale di detta carica.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in modo conforme-coniugato di due superficie di rotazione l'una sull'altra.* Nota del dott. Ubaldo Barbieri, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In relazione a quanto fu esposto nella Nota precedente, proponiamoci, data una superficie S_1 di rotazione, di determinare un'altra superficie S_2, eziandio di rotazione, su cui S_1 sia rappresentabile in modo conforme-coniugato.

Indicando con

$$z = f(r_1)$$
$$z = \varphi(r_2)$$

le equazioni delle curve meridiane della prima e seconda superficie rispettivamente; con

$$\begin{cases} r_1 = \text{cost} \\ \theta_1 = \text{cost} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_2 = \text{cost} \\ \theta_2 = \text{cost} \end{cases}$$

([1]) Cfr. col metodo del Beer, che può vedersi nelle *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* del Duhem.

([2]) V. Robin, Nota cit.