ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

avverrà della serie $\sum_0^\infty g_n$, e, a maggior ragione, della serie $\sum_0^\infty a^{n+1} g_n$: infatti la permeabilità magnetica μ è sempre positiva, quindi la costante a sarà, in valore assoluto, minore dell' unità.

Pongasi allora:

$$h = \sum_0^\infty a^{n+1} g_n . \qquad \left(g_0 = g = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial n}\right)$$

Tenendo conto della formula (10), si riconosce immediatamente che la funzione h, così espressa, verifica l'equazione (14) ([1]).

7. Se facciamo $a = 1$, l'equazione (14) si riduce alla (2), la quale sarà perciò verificata se si pone $h = \sum_0^\infty g_n$ ([2]).

Si avverta che essendo, per qualunque valore di n, $\int_\sigma g_n \, d\sigma = 0$, sarà anche $\int_\sigma h \, d\sigma = 0$. Avremo dunque risoluta l'equazione (2) nell' ipotesi che il conduttore non contenga alcuna carica. Se esso contiene una carica E, dovremo aggiungere ad h la densità e corrispondente alla distribuzione naturale di detta carica.

Matematica. — *Sulla rappresentazione in modo conforme-coniugato di due superficie di rotazione l'una sull'altra.* Nota del dott. Ubaldo Barbieri, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In relazione a quanto fu esposto nella Nota precedente, proponiamoci, data una superficie S_1 di rotazione, di determinare un'altra superficie S_2, eziandio di rotazione, su cui S_1 sia rappresentabile in modo conforme-coniugato.

Indicando con

$$z = f(r_1)$$
$$z = \varphi(r_2)$$

le equazioni delle curve meridiane della prima e seconda superficie rispettivamente; con

$$\begin{cases} r_1 = \text{cost} \\ \theta_1 = \text{cost} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_2 = \text{cost} \\ \theta_2 = \text{cost} \end{cases}$$

([1]) Cfr. col metodo del Beer, che può vedersi nelle *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* del Duhem.

([2]) V. Robin, Nota cit.

le equazioni dei paralleli e dei meridiani su di esse, gli elementi lineari delle due superficie assumeranno, com'è noto, la forma seguente

$$(1)\qquad \begin{cases} ds_1^2 = (1 + f'^2)\, dr_1^2 + r_1^2\, d\theta_1^2 \\ ds_2^2 = (1 + \varphi'^2)\, dr_2^2 + r_2^2\, d\theta_2^2 . \end{cases}$$

Se vogliamo che la rappresentazione conservi i sistemi coniugati, è noto che, indicando con D_1, D_1'' ; D_2, D_2'' i coefficienti delle due seconde forme fondamentali, rispettivamente per la prima e seconda superficie, si dovrà avere l' uguaglianza

$$\frac{D_1}{D_1''} = \frac{D_2}{D_2''} .$$

Servendoci delle espressioni delle coordinate cartesiane x, y, z dei punti delle due superficie, in funzione delle coordinate curvilinee r e θ, sarà facile ricavare

$$\frac{D_1}{D_1''} = \frac{f''}{r_1 f'} , \quad \frac{D_2}{D_2''} = \frac{\varphi''}{r_2 \varphi'} ,$$

onde l' uguaglianza precedente diviene

$$(2)\qquad \frac{f''}{r_1 f'} = \frac{\varphi''}{r_2 \varphi'} .$$

Ciò premesso, pongasi

$$(3)\qquad \begin{cases} d\varrho_1 = \dfrac{\sqrt{1 + f'^2}}{r_1}\, dr_1 \\ d\varrho_2 = \dfrac{\sqrt{1 + \varphi'^2}}{r_2}\, dr_2 ; \end{cases}$$

saranno allora ϱ_1, θ_1, ϱ_2, θ_2 i parametri isometrici sulle due superficie, e gli elementi lineari (1) ridotti alla forma isoterma-isometrica, diverranno

$$(4)\qquad \begin{cases} ds_1^2 = r_1^2(\varrho_1)\,(d\varrho_1^2 + d\theta_1^2) \\ ds_2^2 = r_2^2(\varrho_2)\,(d\varrho_2^2 + d\theta_2^2) . \end{cases}$$

Se la rappresentazione di S_1 su S_2 deve essere altresì conforme, il modo più generale di ottemperarvi, consiste, com'è noto, nel porre

$$(5)\qquad \varrho_1 + i\,\theta_1 = f(\varrho_2 + i\,\theta_2) .$$

Ora, tenuto conto che la (2) stabilisce una relazione fra r_1 ed r_2, ossia, per le (3), un legame fra ϱ_1 e ϱ_2, soddisferemo alla precedente relazione (5) ponendo

$$\begin{cases} \varrho_1 = c\varrho_2 \\ \theta_1 = c\theta_2 . \end{cases}$$

Dalla prima si ricava

$$d\varrho_1 = c\,d\varrho_2\,,$$

e per le (3)

$$\frac{\sqrt{1+f'^2}}{r_1}\,dr_1 = c\,\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{r_2}\,dr_2\,, \tag{6}$$

equazione che dovrà essere soddisfatta se si vuole che la rappresentazione di S_1 su S_2 sia conforme.

Riassumendo, la rappresentazione in modo conforme-coniugato della superficie di rotazione S_1 sull'altra S_2, ci sarà, dunque, definita dalle due equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1+f'^2}}{r_1}\,dr_1 = c\,\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{r_2}\,dr_2 \\ &\frac{f''}{r_1 f'} = \frac{\varphi''}{r_2\varphi'}\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Tenuto conto della proporzionalità fra gli elementi delle due prime forme fondamentali, per essere la rappresentazione conforme, la seconda di queste due equazioni si potrà porre sotto la forma

$$\frac{r_1 f''}{f'(1+f'^2)} = \frac{r_2\varphi''}{\varphi'(1+\varphi'^2)}\,,$$

dalla quale, tenuto conto della prima, sarà facile dedurre

$$\frac{\varphi''\,dr_2}{\varphi'\sqrt{1+\varphi'^2}} = \frac{1}{c}\,\frac{f''\,dr_1}{f'\sqrt{1+f'^2}}\,;$$

e da questa, essendo

$$\int\frac{X''\,dx}{X'\sqrt{1+X'^2}} = -\log\left\{\frac{1}{X'}+\sqrt{1+\frac{1}{X'^2}}\right\} - \log A\,,$$

ricaveremo

$$\frac{1}{\varphi'}+\sqrt{\frac{1}{\varphi'^2}+1} = A\left\{\frac{1}{f'}+\sqrt{\frac{1}{f'^2}+1}\right\}^{\frac{1}{c}},$$

con A e c costanti arbitrarie.

Eseguendo, quindi, un'integrazione nella prima equazione delle (7), potremo allora a detto sistema (7) sostituire il seguente

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\varphi'}+\sqrt{\frac{1}{\varphi'^2}+1} = A\left(\frac{1}{f'}+\sqrt{\frac{1}{f'^2}+1}\right)^{\frac{1}{c}} \\ &c\log r_2 = \int\frac{dr_1}{r_1}\frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\,, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

intendendo sostituito nella seconda di queste equazioni a φ' il suo valore in funzione di r_1:

$$\varphi'(r_2) = \mathrm{F}(r_1) \tag{9}$$

dato dalla prima.

La seconda delle (8), dandoci

$$r_2 = \theta(r_1), \tag{10}$$

ci fornisce la corrispondenza fra le due superficie, acciò la rappresentazione sia conforme-coniugata; mentre se nella (9) sostituiremo per r_1 il suo valore in funzione di r_2, dato dalla (10), potremo con quadrature ricavarci il valore di $\varphi(r_2)$, che definisce la curva meridiana della seconda superficie S_2, che volevamo determinare.

Peraltro, in luogo di eseguire la sostituzione diretta, è più semplice porre

$$\frac{1}{f'} + \sqrt{\frac{1}{f'^2} + 1} = \lambda_1 \qquad \text{da cui} \qquad \sqrt{1 + f'^2} = \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1^2 - 1}$$

$$\frac{1}{\varphi'} + \sqrt{\frac{1}{\varphi'^2} + 1} = \lambda_2 \qquad \text{"} \qquad \sqrt{1 + \varphi'^2} = \frac{\lambda_2^2 + 1}{\lambda_2^2 - 1}:$$

ed allora il sistema (8) diviene

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda_2 = \mathrm{A}\lambda_1^{\frac{1}{c}} \\ &c \log r_2 = \int \frac{\dfrac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1^2 - 1}}{\dfrac{\lambda_2^2 + 1}{\lambda_2^2 - 1}} \frac{dr_1}{r_1} \end{aligned} \right.$$

dove λ_1 è funzione nota di r_1.

Sostituendo il valore di λ_2 dato dalla prima equazione nella seconda, questa diviene la relazione fra r_2 ed r_1 che darà la corrispondenza fra le due superficie.

Da essa si vede che se si assume $c = 1$, $\mathrm{A} = 1$, si ha sempre

$$\log r_2 = \log r_1 + \log \varepsilon;$$

lo stesso accade per $\mathrm{A} = 1$, e $c = -1$; e le due superficie non differiranno fra loro.

Ma se $c \neq \pm 1$, o $\mathrm{A} \neq \pm 1$, allora la relazione fra r_2 ed r_1 diviene tale che la seconda superficie risulterà distinta dalla prima.