ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCI.

1904

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1904

Geometria. — *Sui gruppi di proiettività.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. In una mia Memoria [1] ho dimostrato che, se un gruppo discontinuo di collineazioni reali (immaginarie) lascia fissa una forma quadratica (Hermitiana) di tipo ellittico o iperbolico, esso è propriamente discontinuo: ciò che ha portato a svariate applicazioni di tali gruppi a problemi aritmetici e funzionali. Qui per la prima volta io tratterò i gruppi *generali* di proiettività, lascino, o no, essi fissi una forma quadratica o Hermitiana.

Lo sviluppo delle idee di questa Nota deve essere lasciato a future ricerche, che si presentano non troppo difficili. Per brevità mi occuperò qui solo di proiettività reali: le proiettività immaginarie si studiano, sostituendo nel seguente teorema forme Hermitiane a forme quadratiche; per essere più semplice parlerò solo di forme ternarie: il metodo è però generale.

2. Il teorema fondamentale è il seguente:

Un gruppo discontinuo G *di proiettività reali* P *a determinante* $+1$ *nelle variabili omogenee* x_1, x_2, x_3, *coordinate in un piano* π, *è propriamente discontinuo in una regione* R *di uno spazio* S_5 *a* 5 *dimensioni. Lo spazio* S_5 *non è che il piano* π *considerato come luogo di coniche* $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ *a coefficienti reali, ossia è quello spazio, in cui le* a_{ik} *sono coordinate reali omogenee (e in cui* G *opera pure in modo proiettivo). La regione* R *di* S_5 *è quella che corrisponde a forme* F *definite (elissi immaginarie a coefficienti reali di* π*) non degeneri.*

DIM. Una proiettività P, ridotta a forma canonica, è di uno dei tipi seguenti:

(I) $x'_1 = \varrho_i x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ (ϱ_i costanti reali; $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = 1$)

(II) $x'_1 = \varrho_1 x_1$ $x'_2 = \varrho_2(\cos\theta x_2 - \operatorname{sen}\theta x_3)$ $x'_3 = \varrho_2(\cos\theta x_3 + \operatorname{sen}\theta x_2)$ $(\varrho_1 \varrho_2^2 = 1)$

(III) $x'_1 = \varrho_1(x_1 + x_2)$ $x'_2 = \varrho_1 x_2$ $x'_3 = \varrho_2 x_3$ $(\varrho_1^2 \varrho_2 = 1)$

(IV) $x'_1 = x_1 + x_2$ $x'_2 = x_2 + x_3$ $x'_3 = x_3$.

Ora, ricordando che per una forma F definita non degenere le quantità a_{11}, a_{22}, a_{33} sono sempre differenti da zero, si riconosce tosto che se una tale forma può essere portata dalla P in una forma infinitamente vicina, allora P è del tipo (I) o del tipo (II). (Ricordiamo che F è rappresentata da un punto, che supponiamo a distanza finita dal contorno di R). Se la P è del (I) tipo, devono essere tutte le ϱ pochissimo differenti da $+1$ (caso da

[1] *Sulle forme quadratule ed Hermitiane*, ecc. Atti dell'Accademia Gioenia, 1904.

escludersi, perchè P sarebbe allora infinitesima e G, contro l'ipotesi, non sarebbe discontinuo) oppure una di esse, p. es. ϱ_1, deve essere pochissimo differente da $+1$, mentre ϱ_2, ϱ_3 differirebbero di pochissimo da -1. La P^2 in quest'ultimo caso sarebbe infinitesima (ciò ch'è assurdo, perchè G è supposto discontinuo) a meno che non fosse proprio $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = \varrho_3 = -1$. Se la P è del (II) tipo si riconosce tosto (con ragionamenti analoghi a quelli di Fricke *Automorphe Functionen*, pag. 97) che, se nessuna potenza di P è infinitesima, deve essere $\varrho_1 = 1$, e θ razionale con 2π. Le uniche proiettività P di G che possono portare una F in una forma infinitamente vicina sono perciò proiettività di uno dei tipi seguenti:

$$(P_1) \qquad x_1' = x_1 \quad x_2' = -x_2 \quad x_3' = -x_3$$
$$(P_2) \qquad x_1' = x_1 \quad x_2' = \cos\theta\, x_2 - \operatorname{sen}\theta\, x_3 \quad x_3' = \cos\theta\, x_3 + \operatorname{sen}\theta\, x_2 .$$

Ora P_1, P_2 lasciano fisse rispettivamente le forme:

$$(F_1) \qquad l x_1^2 + m x_2^2 + n x_3^2 + 2 p x_2 x_3$$
$$(F_2) \qquad l x_1^2 + m(x_2^2 + x_3^2)$$

dove l, m, n, p sono costanti qualunque, legati dalla sola condizione che F_1 (F_2) sia definita. Il sistema delle (F_1) uno è spazio a 3 dimensioni S_3 in S_5; il sistema delle (F_2) è una retta S_1 in S_5; come rivela un facile calcolo le uniche forme F (gli unici punti di R) che P_1 o P_2 portano in forme (in punti) infinitamente vicini sono quelle (quelli) che sono infinitamente vicine a una delle forme F_1 o F_2 (vicini allo S_3 o S_1 assiale della considerata trasformazione). Di più notiamo che dato lo spazio assiale S_3 o S_1, la P_1 o la P_2 sono determinate a meno al più dell'angolo θ. Ora, se G fosse in R impropriamente discontinuo, vicino a ogni punto di R passerebbe uno di questi S_1 o di questi S_3; in una regione di R esisterebbero almeno due di questi S_1 o S_3 infinitamente vicini; siano U, V le corrispondenti trasformazioni; le $U^{-1}VU$ e la V sarebbero trasformazioni (simili) con spazî assiali *distinti*, ma infinitamente vicini. La $U^{-1}VUV^{-1}$ sarebbe perciò infinitesima, senza però ridursi all'identità. Il gruppo G, contenendo trasformazioni infinitesime, non sarebbe discontinuo, contro l'ipotesi.

L'importanza di questo teorema e dell'analogo per proiettività complesse (cfr. § 1) consiste in questo, che esso dà uno spazio, in cui un gruppo *discontinuo qualunque* è impropriamente discontinuo, e perciò *possiede un campo fondamentale* H. Per la ricerca dei campi fondamentali è, come ho dimostrato nella Memoria citata, assai importante l'introduzione di metriche ossia di un invariante (distanza) di 2 punti. Anche nel nostro caso 2 punti di S_5 (due coniche di π) hanno, com'è ben noto, non uno, ma due invarianti distinti rispetto a ogni proiettività di π; il vedere quale possa essere l'im-

portanza di tali invarianti nella ricerca effettiva dei campi fondamentali, deve essere lasciato a future ricerche.

3. Accennerò ora, come i risultati precedenti, diano senz'altro il mezzo di risolvere le due questioni *fondamentali*:

I. Quando mai G opererà in modo propriamente discontinuo sulle $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, considerate come variabili complesse, e si potrà perciò parlare di funzioni delle $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ invarianti per G (automorfe)?

II. Come si possono applicare i risultati precedenti alla teoria aritmetica delle forme quadriche di tipo iperbolico?

Ad entrambe le domande si risponde con uno stesso artificio.

Consideriamo il piano π come luogo di rette ξ_1, ξ_2, ξ_3 e il gruppo G′ (correlativo di G) nelle variabili ξ. Pensiamo a G′, al solito, come operante sulle forme F′ quadriche $\Sigma\beta_{ik}\xi_i\xi_k$ e indichiamo ancora con S, R lo spazio delle β_{ik} e quella regione di esso che corrisponde a forme definite. La F′, se degenere, si sdoppia in due punti immaginarî coniugati; lo studiare come G opera sulle variabili complesse $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ corrisponde perciò a studiare come G′ opera sulle coniche degeneri. Costruito perciò un poliedro H′ fondamentale per G′ in S avremo:

Il gruppo G *è propriamente discontinuo nelle variabili complesse* $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ *e può servire alla costruzione di funzioni automorfe, allora e allora soltanto che* G′ *opera in modo propriamente discontinuo sulle forme quadriche degeneri, ossia quando* H′ *ha tra le sue faccie un pezzo della superficie* $(\beta_{ik}) = 0$. Indico con (β_{ik}) il determinante delle β. Sia ora $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ una forma iperbolica in coordinate di punti. Sarà $\Sigma a_{ik}\beta_{ik}$ un invariante per G e G′; la F è determinata, appena sia dato in S l'iperpiano I definito da $\Sigma a_{ik}\beta_{ik} = 0$ (dove β_{ik} si intendono come coordinate correnti). E la F si potrà dire ridotta, se I taglia H′: ne discende tosto che ogni forma F è equivalente almeno a una ridotta; di più le regioni di I interne ai poliedri fondamentali contigui ad H′ si potranno con una trasformazione di G′ portare entro H′; essi determineranno così nuove forme ridotte, che diremo contigue alla forma ridotta iniziale. Le proiettività, lascianti fissa la F, corrisponderanno a proiettività di S, lascianti fisso l'iperpiano I ecc. Come si vede dunque, anche la teoria delle forme di tipo iperbolico rientra nella nostra teoria generale ed è completamente analoga alla teoria di Klein per le forme di Gauss.

Oss. I^a. Il fatto che i gruppi proiettivi su 2 variabili omogenee conducano precisamente a gruppi lascianti fissa una forma quadratica risulta ora evidente dal fatto che il discriminante (β_{ik}) di una forma quadratica o

Hermitiana in 2 variabili è di 2° grado nei coefficienti della forma. Nel nostro caso la $(\beta_{ik}) = 0$ è di 3° grado; è perciò interessante lo studio diretto delle proiettività lascianti fissa una forma di 3° grado o di grado più elevato: Dopo la presentazione della presente nota io sono giunto al seguente teorema: *Un gruppo reale proiettivo, che lascia fissa una varietà* V, *e senza trasformazioni infinitesime è propriamente discontinuo in quella regione (se esiste) i cui punti sono interni alla propria quadrica polare rispetto a* V; un teorema analogo vale per gruppi complessi, e per i sistemi di varietà; da questo teorema si possono dedurre di nuovo i precedenti risultati.

Oss. II^a. Per quanto, come ho detto nel § 1, la teoria delle proiettività complesse si possa trattare direttamente in modo analogo, pure osserverò che scindendo ogni variabile nella parte reale e nella immaginaria, il loro studio può (*in un certo senso*) rientrare nello studio delle proiettività reali; è pure ben chiaro che queste ultime sono caso particolare di proiettività complesse. Così p. es. le collineazioni reali trasformanti in sè una forma quadratica reale $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ sono caso particolare delle collineazioni generali trasformanti in sè la forma Hermitiana $\frac{1}{2} \Sigma a_{ik}(x_i x_k^0 + x_k x_i^0)$, dove le x_i^0 sono le variabili immaginarie coniugate delle x_i.

Fisica. — *Ricerche ed esperienze di telefonia elettrica senza filo.* Nota preliminare di Quirino Majorana, presentata dal Socio P. Blaserna.

Subito dopo l'invenzione della telegrafia elettrica senza filo, era naturale che il desiderio di poter trasmettere anche la parola, mediante l'uso di rapide perturbazioni od oscillazioni elettriche si facesse sentire. Il problema si presentava abbastanza seducente, anche perchè l'apparato ricevente di un possibile *telefono elettrico senza filo*, non doveva essero più studiato; il rivelatore o detector magnetico di Marconi, o i coherer a decoesione spontanea molto probabilmente si sarebbero prestati a riprodurre i suoni o le parole trasmessi mediante onde elettromagnetiche di variabile intensità.

Molte volte fu annunziato dalla stampa la realizzazione di un simile dispositivo, ma a me non consta che serie esperienze sieno state sinora eseguite, seguendo il concetto suesposto.

Chi comincia a studiare questo problema, crede forse alla necessità di produrre *onde elettromagnetiche persistenti* di lunghezza paragonabile a quelle adoperate in telegrafia senza filo. È perciò che taluno ha proposto di servirsi delle rapide oscillazioni date da un arco cantante, cercando di aggiungere al circuito vibrante di esso, altro circuito aperto destinato a disperdere energia nel libero spazio e nel suolo. Ma la piccolezza dell'energia disponibile nel circuito Duddel (anche se questo è posto in vibrazione dalla