ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1905.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un teorema sulla teoria della elasticità.* Nota del Socio Vito Volterra.

Art. I.

1. Il prof. Weingarten ha pubblicato qualche tempo fa in questi Rendiconti (1) una interessante Nota sulla teoria della elasticità. Egli osserva che possono esistere dei casi in cui un corpo elastico, pur non essendo soggetto ad alcuna azione esterna, ossia, senza essere sottoposto nè a forze di massa, nè a tensioni superficiali, nondimeno può non trovarsi nello stato naturale, ma essere in uno stato di tensione il quale varia continuamente e regolarmente da punto a punto.

Casi pratici di corpi in simili condizioni sono facili a trovarsi. Tale è un anello a cui sia stata tolta una sottile fetta trasversale e se ne siano risaldati poi fra loro i due capi.

2. Nella Nota del Weingarten resta sospesa però una questione. Oltre gli anelli ed altri corpi che occupano spazii più volte connessi possono esistere casi di corpi semplicemente connessi i quali si trovino nelle condizioni suddette?

A prima vista la questione non è facile a risolversi, ma intuitivamente si sarebbe condotti a dare una risposta affermativa. Infatti può sembrare che, anche nel caso di corpi semplicemente connessi, facendo una fenditura ed introducendovi a forza un elemento cuneiforme, oppure risaldando le due

(1) *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi.* Serie V, vol. X, 1° semestre 1901.

faccie della fenditura dopo avere asportata una sottile fetta del corpo si possano ottenere stati di equilibrio senza forze esterne nei quali la tensione e la deformazione variano senza discontinuità e regolarmente da punto a punto al pari che nei corpi a connessione multipla. Il Weingarten dà le condizioni che dovrebbero verificarsi in questi casi, qualora essi esistessero.

3. Scopo di questa Nota è di mostrare, col sussidio di una semplice osservazione analitica, la impossibilità di essi quando si ammetta che la continuità della deformazione sia estesa anche alle derivate prime e seconde degli elementi caratteristici della deformazione stessa.

Ciò stabilisce uno stretto riscontro fra la questione di elasticità e una questione analoga di idrodinamica.

Il teorema di idrodinamica a cui ci riferiamo è il seguente: *Un fluido incompressibile finito, che si trova racchiuso entro pareti rigide e fisse e nel quale non esistono vortici, deve stare in quiete se lo spazio da esso occupato è semplicemente connesso* (*aciclico*), *mentre può essere in movimento se lo spazio occupato è più volte connesso* (*ciclico*).

Ecco ora le proprietà analoghe per la elasticità.

Diremo che una deformazione di un corpo elastico è *regolare* quando le sei caratteristiche della deformazione (lo *strain* secondo la denominazione degli Inglesi) sono funzioni finite continue monodrome, aventi le derivate del primo e del secondo ordine pure finite continue e monodrome.

Potremo allora enunciare il seguente teorema:

Se un corpo elastico occupa uno spazio finito semplicemente connesso (aciclico) *e subisce solo deformazioni regolari, esso si troverà allo stato naturale quando non sarà soggetto nè a forze di massa nè a tensioni superficiali.*

Invece:

Un corpo elastico, che occupa uno spazio finito più volte connesso (ciclico), *potrà non essere nello stato naturale, potrà trovarsi cioè in uno stato di tensione, anche quando non è soggetto nè a forze di massa nè a tensioni superficiali, pure essendo la sua deformazione regolare.*

Questa proposizione stabilisce una essenziale differenza fra le proprietà dei corpi elastici che occupano uno spazio semplicemente connesso (aciclico) e quelle dei corpi elastici che occupano spazii più volte connessi (ciclici).

Se ci riferiamo ai casi pratici sopra ricordati ciò significa che, se la connessione è semplice, la introduzione di uno strato cuneiforme, o l'asportazione di una sottile fetta, risaldando poi le faccie della fenditura, ingenera sempre nel sistema elastico una deformazione non regolare o qualche lacuna; mentre l'opposto può aversi quando la connessione sia multipla.

In generale potremo dire che, se si ha un corpo non soggetto ad azioni esterne ed in istato di tensione, o esso occupa uno spazio più volte connesso o esso ha in qualche regione la deformazione non regolare.

L'articolo seguente sarà consacrato alla dimostrazione della proposizione enunciata ed il successivo alla esposizione di due esempii analitici relativi a corpi elastici più volte connessi soggetti a tensioni e non sottoposti a forze esterne.

Art. II.

1. Denotiamo con $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ sei funzioni delle variabili x, y, z, monodrome finite, continue e aventi le derivate del primo e del secondo ordine pure monodrome, finite e continue entro un campo a tre dimensioni S semplicemente connesso. Tracciamo entro S una linea regolare s le cui coordinate rappresenteremo con x, y, z, mentre chiameremo x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1 quelle degli estremi A_0 e A_1.

La direzione positiva di s sia da A_0 ad A_1. I valori delle γ_{is} in A_0 e A_1 si rappresenteranno respettivamente con $\gamma_{is}^{(0)}$ e $\gamma_{is}^{(1)}$. Supporremo $\gamma_{rs} = \gamma_{sr}$. Poniamo

$$
\text{(I)} \quad \begin{aligned} u = u_0 &+ \frac{1}{2}(\gamma_{21}^{(0)} + r_0)(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{31}^{(0)} - q_0)(z_1 - z_0) + \\
&+ \int_s \Big\{ \Big[\gamma_{11} + (y_1 - y)\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y} + (z_1 - z)\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z} \Big] \frac{dx}{ds} + \\
&\quad + \Big[(y_1 - y)\Big(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x}\Big) + \Big(\frac{z_1 - z}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x}\Big) \Big] \frac{dy}{ds} + \\
&\quad + \Big[\Big(\frac{y_1 - y}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x}\Big) + (z_1 - z)\Big(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x}\Big) \Big] \frac{dz}{ds} \Big\} ds \end{aligned}
$$

$$
\text{(I')} \quad \begin{aligned} v = v_0 &+ \frac{1}{2}(\gamma_{32}^{(0)} + p_0)(z_1 - z_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^{(0)} - r_0)(x_1 - x_0) + \\
&+ \int_s \Big\{ \Big[\Big(\frac{z_1 - z}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\Big) + (x_1 - x)\Big(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y}\Big) \Big] \frac{dx}{ds} + \\
&\quad + \Big[\gamma_{22} + (z_1 - z)\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial z} + (x_1 - x)\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x} \Big] \frac{dy}{ds} + \\
&\quad + \Big[(z_1 - z)\Big(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y}\Big) + \Big(\frac{x_1 - x}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\Big) \Big] \frac{dz}{ds} \Big\} ds \end{aligned}
$$

$$
\text{(I'')} \quad \begin{aligned} w = w_0 &+ \frac{1}{2}(\gamma_{13}^{(0)} + q_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{23}^{(0)} - p_0)(y_1 - y_0) + \\
&+ \int_s \Big\{ \Big[(x_1 - x)\Big(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z}\Big) + \Big(\frac{y_1 - y}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\Big) \Big] \frac{dx}{ds} + \\
&\quad + \Big[\Big(\frac{x_1 - x}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\Big) + (y_1 - y)\Big(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial z}\Big) \Big] \frac{dy}{ds} + \\
&\quad + \Big[\gamma_{33} + (x_1 - x)\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x} + (y_1 - y)\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y} \Big] \frac{dz}{ds} \Big\} ds \end{aligned}
$$

in cui $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ sono quantità costanti.

Cerchiamo le condizioni affinchè u, v, w non dipendano dalla linea di integrazione s; ma solo dai due estremi A_0 e A_1, ossia, supponendo A_0 fisso, cerchiamo le condizioni affinchè u, v, w siano funzioni di x_1, y_1, z_1.

2. A tal fine basterà supporre la linea s chiusa, ossia i punti A_0 e A_1 coincidenti e determinare le condizioni perchè gl' integrali estesi alla linea s siano nulli.

Il teorema di Stokes, allorchè la linea s è chiusa, trasforma i detti integrali in

$$\int_\sigma \left\{ \left[\frac{y_1 - y}{2} B - \frac{z_1 - z}{2} C \right] \cos nx + \left[(z_1 - z) F + \frac{y_1 - y}{2} A \right] \cos ny + \right.$$
$$\left. + \left[(y_1 - y) G + \frac{z_1 - z}{2} A \right] \cos nz \right\} d\sigma ,$$

$$\int_\sigma \left\{ \left[(z_1 - z) E + \frac{x_1 - x}{2} B \right] \cos nx + \left[\frac{z_1 - z}{2} C - \frac{x_1 - x}{2} A \right] \cos ny + \right.$$
$$\left. + \left[(x_1 - x) G + \frac{z_1 - z}{2} B \right] \cos nz \right\} d\sigma ,$$

$$\int_\sigma \left\{ \left[(y_1 - y) E + \frac{x_1 - x}{2} C \right] \cos nx + \left[(x_1 - x) F + \frac{y_1 - y}{2} C \right] \cos ny + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{x_1 - x}{2} A - \frac{y_1 - y}{2} B \right] \cos nz \right\} d\sigma$$

in cui σ è una superficie avente per contorno s ed interna allo spazio S, n denota la normale a σ scelta in un verso conveniente e

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z \partial y} , \quad E = \frac{\partial^2 \gamma_{32}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y^2} ,$$

$$B = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x \partial z} , \quad F = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z^2} ,$$

$$C = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y \partial x} , \quad G = \frac{\partial^2 \gamma_{21}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x^2} .$$

Ne segue che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè u, v, w siano indipendenti dal cammino s d' integrazione sono

$$\text{(II)} \qquad A = B = C = E = F = G = 0 .$$

3. Supponiamo verificate le precedenti equazioni; u, v, w saranno funzioni di x_1, y_1, z_1.

Per calcolare le derivate dovremo tener conto che queste quantità compariscono esplicitamente sotto il segno di integrazione e sono nello stesso tempo le coordinate di un estremo del cammino d'integrazione. Fatta questa osservazione le ordinarie regole del calcolo conducono subito alle formule

$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \gamma_{11}^{(1)}\,, & \dfrac{\partial v}{\partial y_1} = \gamma_{22}^{(1)}\,, \quad \dfrac{\partial w}{\partial z_1} = \gamma_{33}^{(1)}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w}{\partial y_1} = \gamma_{23}^{(1)}\,, & \dfrac{\partial w}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial z_1} = \gamma_{31}^{(1)}\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y_1} + \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = \gamma_{12}^{(1)}\,. \end{cases}
$$

Possiamo quindi concludere che, quando le γ_{rs} soddisfano le equazioni (II), si possono trovare le tre funzioni u, v, w che verificano le (1), ossia che le γ_{rs} si possono considerare come le caratteristiche della deformazione di un mezzo elastico. La proposizione reciproca si verifica immediatamente.

4. Le formule (I), (I′), (I″) sono notevoli, perchè ciascuna di esse dà modo, con una semplice quadratura, di ricavare una delle componenti dello spostamento dalle caratteristiche della deformazione.

Kirchhoff [1] e Love [2] hanno espresso ciascuna delle derivate di u, v, w per mezzo di una analoga quadratura. Si può passare, mediante facili integrazioni per parti, dalle formule di Kirchhoff e Love alle (I), (I′), (I″). In esse compariscono le sei costanti arbitrarie $u_0, v_0, w_0\,; p_0, q_0, r_0$, cioè i valori delle componenti dello *spostamento* nel punto A_0 e quelli delle componenti del vettore chiamato da Maxwell *rotazione*. Le (II) non sono altro che le ben note formule del De Saint-Venant.

5. Le equazioni (II) esprimono le condizioni affinchè i valori di u, v, w dati dalle (I), (I′), (I″) siano indipendenti dal cammino d'integrazione, allorchè lo spazio S è semplicemente connesso; ma se lo spazio S fosse più volte connesso, potrebbero i detti valori dipendere dal cammino d'integrazione, pur essendo soddisfatte le (II). Ricordiamo infatti che la dimostrazione della indipendenza del cammino sui valori di u, v, w si è ricavata nel § 2, quando lo spazio è semplicemente connesso, dal fatto che ogni linea chiusa s dello spazio può ritenersi contorno di una superficie σ appartenente allo spazio stesso. Ma se lo spazio è più volte connesso, questo fatto non si verifica più per ogni linea s, e di qui segue che il cammino può influire sui valori di u, v, w. Avremo dunque il teorema seguente:

Un corpo elastico che occupa uno spazio semplicemente connesso e la cui deformazione è regolare, si potrà sempre ricondurre allo stato naturale mediante spostamenti finiti continui e monodromi dei suoi punti.

Invece potremo dire:

Se un corpo elastico occupa uno spazio più volte connesso e la sua deformazione è regolare, gli spostamenti dei punti non saranno necessariamente monodromi.

(1) Mechanik, XXVII Vorl. § 4.
(2) Math. Theory of elasticity, vol. I, § 66.

Riduciamo semplicemente connesso lo spazio ciclico mediante un sistema di sezioni. Nello spazio sezionato esisterà un sistema di spostamenti finiti continui e monodromi che corrispondono alla data deformazione. I valori di questi spostamenti potranno però non riattaccarsi con continuità lungo le dette sezioni. Quando ciò avviene, volendo ricondurre il corpo allo stato naturale, converrà togliere la connessione della materia lungo le dette sezioni e ivi far nascere delle fessure o asportare della materia o far scorrere l'una sull'altra le due faccie della fenditura. (Vedi gli esempii dell'Art. successivo).

6. Ricordiamo ora la dimostrazione che si fa per provare che un corpo elastico, il quale non è soggetto a forze esterne, si trova nello stato naturale. Essa presuppone implicitamente che i punti del corpo elastico subiscano spostamenti finiti continui e monodromi e la deformazione del sistema sia regolare. Ne segue che se sappiamo che la deformazione è regolare ed il corpo occupa uno spazio semplicemente connesso, potremo ricavare dall'assenza di forze esterne la conseguenza che il sistema non dovrà essere soggetto ad alcuna tensione interna; ma se il corpo occupa uno spazio più volte connesso la deformazione regolare potrà coesistere con una polidromia degli spostamenti e quindi il corpo stesso potrà essere soggetto a tensioni.

Di qui resulta il teorema che abbiamo enunciato nell'Art. I.

7. Da questo teorema può dedursi facilmente un corollario importante.

Note le tensioni superficiali e le forze di massa agenti sopra un corpo elastico, la deformazione sarà individuata se lo spazio occupato dal corpo sarà semplicemente connesso, ma non sarà determinata se lo spazio stesso sarà più volte connesso, a meno che non si sappia a priori che il sistema può portarsi allo stato naturale mediante spostamenti finiti continui e monodromi.

La dimostrazione di questo corollario discende immediatamente da quella del sopra ricordato teorema.

L'interesse di questa proposizione consiste in ciò, che la ordinaria teoria matematica della elasticità va modificata nel caso dei corpi che occupano spazii più volte connessi, giacchè la teoria stessa è appoggiata tutta sul fatto che le forze di massa e le tensioni superficiali determinano la deformazione del corpo. La teoria ordinaria si conserva però nel caso dei corpi che occupano spazii semplicementi connessi, oppure in generale quando si sappia *a priori* che il sistema è riconducibile allo stato naturale mediante spostamenti monodromi.

8. È facile ricavare dalle formole (I), (I') e (I'') la natura delle discontinuità che presentano le u, v, w lungo le sezioni che rendono lo spazio occupato dal corpo semplicemente connesso. Chiamando u_α, v_α, w_α i valori da

una parte di una di queste sezioni e $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ i valori dell'altra parte, e posto

$$u_\beta - u_\alpha = \mathrm{U}\,,\; v_\beta - v_\alpha = \mathrm{V}\,,\; w_\beta - w_\alpha = \mathrm{W}$$

e denotando con l, m, n, p, q, r sei quantità costanti lungo ciascuna sezione, avremo

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{U} = l + ry - qz\,,\; \mathrm{V} = m + pz - rx\,,\; \mathrm{W} = n + qx - py$$

come per altra via aveva trovato il Weingarten.

Nel caso dunque di un corpo più volte connesso, ad ognuno dei tagli che servono a ridurre lo spazio semplicemente connesso si possono far corrispondere sei costanti che individuano la polidromia degli spostamenti calcolati mediante le formule (I), (I') e (I'').

Queste costanti, per analogia a ciò che si fa nella teoria delle funzioni, si possono chiamare le *sei costanti di ciascun taglio.*

La proposizione fondamentale della teoria dell'elasticità va allora enunciata nei termini seguenti:

Se un corpo elastico occupa uno spazio più volte connesso, e la sua deformazione è regolare; questa sarà determinata dalle forze di massa, dalle tensioni superficiali e dalle sei costanti relative a ciascuno dei tagli che servono a ridurre lo spazio semplicemente connesso.

Art. III.

1° *Esempio.*

1. Poniamo

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\beta x^2 - \alpha y^2}{x^2+y^2} + \frac{\beta}{2}\log(x^2+y^2) \\ \gamma_{22} &= \frac{\beta y^2 - \alpha x^2}{x^2+y^2} + \frac{\beta}{2}\log(x^2+y^2) \\ \gamma_{33} &= \gamma\log(x^2+y^2) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_{23} &= 2\gamma\,\frac{yz}{x^2+y^2} \\ \gamma_{31} &= 2\gamma\,\frac{xz}{x^2+y^2} \\ \gamma_{12} &= 2(\alpha+\beta)\,\frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}\right.$$

in cui α, β, γ sono quantità costanti.

È facile verificare che le equazioni (II) di De Saint Venant sono soddisfatte. Queste funzioni non hanno altre singolarità che per $x = y = 0$, ossia lungo l'asse coordinato z. Escludendo quindi con un cilindro avente per asse z questo luogo singolare, in tutto lo spazio rimanente queste sei quantità potranno essere interpretate come le caratteristiche di una deformazione regolare Γ.

Gli spostamenti corrispondenti si calcolano facilmente. Chiamandone u, v, w le componenti, queste resulteranno (a meno di uno spostamento rigido arbitrario) date dalle formule

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \alpha y \operatorname{arco\,tg} \frac{y}{x} + \frac{\beta}{2} x \log (x^2 + y^2) \\ v &= -\alpha x \operatorname{arco\,tg} \frac{y}{x} + \frac{\beta}{2} y \log (x^2 + y^2) \\ w &= \qquad\qquad\qquad \gamma z \log (x^2 + y^2) \end{aligned} \right.
$$

Le funzioni u e v sono *polidrome* e l'asse di diramazione è l'asse z.

2. Ciò premesso immaginiamo un corpo isotropo omogeneo C che occupi uno spazio S limitato fra due cilindri di rivoluzione σ_1 e σ_2 aventi per asse z e i cui raggi sono R_1 e R_2 e fra due piani normali all'asse z. Supposte nulle le forze di massa, le equazioni indefinite dell'equilibrio

$$
(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & K\Delta^2 u + (L + K) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ & K\Delta^2 v + (L + K) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ & K\Delta^2 w + (L + K) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \right.
$$

saranno soddisfatte dalle (2) quando sia verificata l'equazione

$$K\alpha + (L + 2K)\beta + (L + K)\gamma = 0 ,$$

la quale a sua volta sarà soddisfatta prendendo

$$\gamma = 0 \qquad \beta = -\alpha \frac{K}{L + 2K} .$$

Il calcolo delle corrispondenti tensioni superficiali non presenta difficoltà. Sulla superficie σ_1 troviamo una tensione uniforme normale a σ_1 diretta verso l'interno della massa data da

$$T_{\sigma_1} = \alpha(L + K) \left(1 + \frac{2K}{L + 2K} \log R_1 \right) ,$$

sopra σ_2 una tensione pure uniforme e diretta verso l'interno della massa data da

$$T_{\sigma_2} = \alpha(L + K) \left(1 + \frac{2K}{L + 2K} \log R_2 \right)$$

mentre sopra le due basi normali a z troviamo le tensioni normali dirette sempre verso l'interno

$$T_\omega = \frac{\alpha L}{L + 2K} (L + 3K + 2K \log r)$$

in cui r denota la distanza dell'asse z.

3. Immaginiamo ora un corpo fittizio della stessa natura del corpo C, il quale occupi lo stesso spazio del corpo C, ma che si trovi nello stato naturale.

Senza togliere in alcun modo la connessione al corpo stesso, sollecitiamolo mediante le tensioni T_{σ_1}, T_{σ_2} e T_{ω} sopra le superficie laterali e sulle due basi. Denotiamo con u', v', w' le componenti corrispondenti dello spostamento. Queste saranno funzioni finite, continue e monodrome, e se prendiamo

$$u'' = u - u' = \alpha \left[y \text{ arco tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L + 2K} x \log(x^2 + y^2) \right] - u'$$

$$v'' = v - v' = \alpha \left[- x \text{ arco tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L + 2K} y \log(x^2 + y^2) \right] - v'$$

$$w'' = w - w' = - w'$$

otterremo un sistema di spostamenti del corpo C i quali sono diversi da zero e differiscono da uno spostamento rigido. Agli spostamenti u'', v'', w'' corrisponderà quindi una deformazione diversa da zero e regolare e in conseguenza una tensione interna; ma le tensioni superficiali e le forze di massa saranno nulle. Se denotiamo con γ'_{is} le caratteristiche della deformazione Γ' corrispondente agli spostamenti u', v', w', quelle della deformazione Γ'' corrispondente a u'', v'', w'' saranno $\gamma''_{is} = \gamma_{is} - \gamma'_{is}$.

4. Le funzioni u'', v'', w'' sono polidrome al pari delle u, v, w ed hanno per asse di polidromia l'asse z. Chiamiamo u_α, v_α, w''_α i loro valori in un punto situato lungo il piano xz dalla parte positiva dell'asse x. Partendo da questo punto ruotiamo intorno all'asse z compiendo un intiero giro e prendiamo i successivi valori di u'', v'', w'' che si seguono con continuità lungo il ciclo che si percorre. Denotando un u''_β, v''_β, w''_β i valori con cui si torna al punto di partenza, avremo

$$u''_\beta - u''_\alpha = 0 \quad , \quad v''_\beta - v''_\alpha = - 2\pi\alpha x \quad , \quad w''_\beta - w''_\alpha = 0 \, .$$

5. Ne segue che se α è positivo, lo stato di deformazione regolare Γ'' del corpo potrà ottenersi prendendo il corpo il quale occupi nello stato naturale il cilindro cavo precedentemente considerato, eseguendo quindi un taglio lungo il piano xz dalla parte positiva dell'asse x, ed infine interponendo fra le due faccie del taglio un sottile strato la cui grossezza varii proporzionalmente alla distanza dell'asse.

Se α è negativo per ottenere lo stato di tensione corrispondente converrà invece togliere lungo il piano xz, dalla parte delle x positive, una sottile fetta, la cui grossezza varii proporzionalmente alla distanza dell'asse, quindi attaccare fra loro le due faccie della fenditura.

2° *Esempio*:

6. Poniamo

$$\gamma_{11} = 0 \quad , \quad \gamma_{22} = 0 \quad , \quad \gamma_{33} = 0$$

$$\gamma_{23} = \frac{\alpha x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \gamma_{31} = -\frac{\alpha y}{x^2 + y^2} \quad , \quad \gamma_{12} = 0 .$$

Le equazioni (II) del De Saint-Venant saranno soddisfatte e le precedenti funzioni non avranno altra singolarità che lungo l'asse z.

Gli spostamenti corrispondenti verranno (a meno di uno spostamento rigido)

(4) $$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = \alpha \operatorname{arco\,tg} \frac{y}{x} .$$

w resulterà quindi polidromo e avrà per asse di diramazione l'asse z.

Immaginiamo un corpo il quale occupi lo stesso spazio costituito dal cilindro cavo S, come nell'esempio precedente. Gli spostamenti (4) soddisfaranno le equazioni (3) e le tensioni lungo le superficie laterali σ_1 e σ_2 resulteranno nulle, mentre le forze agenti sulle basi avranno respettivamente per componenti, sull'una

$$X_\omega = -\frac{\alpha K y}{x^2 + y^2} \quad , \quad Y_\omega = \frac{\alpha K x}{x^2 + y^2} \quad , \quad Z_\omega = 0 ,$$

sull'altra

$$X'_\omega = \frac{\alpha K y}{x^2 + y^2} \quad , \quad Y'_\omega = -\frac{\alpha K x}{x^2 + y^2} \quad , \quad Z'_\omega = 0 .$$

Prendiamo adesso un corpo fittizio della stessa sostanza, allo stato naturale, che occupi il cilindro cavo S e senza togliere la connessione assoggettiamolo alle forze di torsione precedenti agenti sulle due basi.

Si chiamino u', v', w' gli spostamenti che ne conseguono. Questi saranno funzioni finite continue e monodrome; e posto

$$u'' = -u' \quad , \quad v'' = -v' \quad , \quad w'' = w - w'$$

a questi spostamenti corrisponderà uno stato di tensione interna del corpo, mentre le tensioni esterne e le forze di massa saranno nulle. La deformazione sarà evidentemente regolare.

7. È facile vedere come si può produrre questo stato di tensione. Preso il corpo allo stato naturale che occupi lo spazio racchiuso entro il cilindro cavo S, lo si tagli lungo il piano xz dalla parte positiva dell'asse x; quindi si facciano scorrere lievemente le due faccie del taglio l'una rispetto all'altra parallelamente all'asse z, in modo che il cilindro assuma una forma

leggermente elicoidale. Ciò fatto si saldino le due faccie l'una all'altra nei punti prospicenti.

Le due basi verranno così ad acquistare una dentellatura lungo il piano xz della parte delle x positive, ma essa sarà infinitesima e senza alterare le condizioni del sistema potremo immaginarla tolta appianando le basi stesse.

Astronomia. — *Osservazioni del nuovo pianetino PS 1905 fatte all'equatoriale di 39 cm.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Il pianetino, scoperto dal dott. Götz col metodo fotografico l'8 gennaio all'Istituto astro-fisico di Königsthul, interessante perchè sono oggidì eccezioni le scoperte di pianetini lucenti (circa di $10^{m}\,{}^{1}/_{4}$), fu trovato dal dott. Bianchi l'11 gennaio e fu osservato da lui e da me fino a ieri come segue:

Data	T. Medio R.C.R.	α apparente pianeta	δ apparente pianeta	Osservatore
1905 gennaio 11	$9^h52^m\ 3^s$	$8^h30^m21^s.60$ ($9^n.541$) ;	$+\ 18°40'20''.7$ (0.618)	B.
" " 12	7 43 19	8 29 25. 21 ($9^n.658$) ;	+ 18 41 52. 0 (0.713)	B.
" " 12	7 43 19	8 29 25. 27 ($9^n.658$) ;	+ 18 41 52. 0 (0.713)	B.
" " 14	9 51 10	8 27 12. 88 ($9^n.517$) ;	+ 18 45 36. 6 (0.608)	M.
" " 22	9 55 27	8 18 27. 10 ($9^n.416$) ;	+ 19 0 16. 9 (0.574)	M.
" " 28	9 2 39	8 11 57. 16 ($9^n.473$) ;	+ 19 10 39. 1 (0.587)	M.
1905 febbraio 4	9 15 50	8 4 52. 67 ($9^n.337$) ;	+ 19 20 56. 9 (0.556)	M.

Lo splendore (grandezza) venne stimato nel seguente modo:

Gennaio 11	10.3
" 12	10.2
" 14	10.7
" 22	10.3
" 28	10.5
Febbraio 4	10.3

Fisiologia. — I. *Dimostrazione dei centri respiratori spinali per mezzo dell'acapnia.* — II. *Differenze individuali nella resistenza alla pressione parziale dell'ossigeno.* — III. *Depressione barometrica e pressione parziale del CO_2 nell'aria respirata.* — IV. *La pressione del sangue nell'aria rarefatta.* Note del Socio Angelo Mosso.

Queste Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.