ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Fisica terrestre. — *Studi sulla radioattività dei soffioni boraciferi della Toscana e sulla quantità di emanazione in essi contenuta.* Nota preliminare del Corrispondente R. NASINI, e dei dottori F. ANDERLINI e M. G. LEVI.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra alcune funzioni ausiliari.* Nota di LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente G. A. MAGGI.

L'integrazione della $\varDelta_{2n}$ in un campo S, quando i soliti dati la rendano possibile, può ritenersi generalmente eseguita, se noi sappiamo determinare, per il campo S, la funzione n^{ma} di Green; ma la ricerca di questa funzione, anche per corpi di forma semplicissima, è molto difficile, quasi altrettanto quanto il problema proposto.

Limitandoci, per evitare troppi calcoli, ma senza pregiudizio dei casi più generali, alla $\varDelta_2$ e alla $\varDelta_4$, noi definiremo invece alcune funzioni ausiliari, che hanno lo stesso ufficio della funzione di Green, ma contengono alcuni elementi arbitrarî, dei quali si può approfittare per rendere più facile la stessa ricerca di queste funzioni ausiliari, nei singoli casi.

Sia indicato con A_1 un polo, di coordinate x_1, y_1, z_1 in S; e A, di coordinate x, y, z, rappresenti un punto del medesimo spazio S. Denoti r la distanza fra A ed A_1.

Se $u(x, y, z)$ e $H_1(x, y, z)$ rappresentano due funzioni regolari in S, valgono le due formule note

$$4\pi u(x_1, y_1, z_1) = \int \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) d\sigma - \int \frac{1}{r} \varDelta_2 u \, dS,$$

$$0 = \int \left(u \frac{dH_1}{dn} - H_1 \frac{du}{dn} \right) d\sigma - \int (H_1 \varDelta_2 u - u \varDelta_2 H_1)\, dS,$$

dove le derivate su n denotano derivate di direzione secondo la normale interna a S, nei punti del contorno σ; e gl'integrali in $d\sigma$, dS sono riferiti a elementi intorno al punto A, e rispettivamente estesi a tutto il contorno σ e a tutto il campo S. Per sottrazione, ricaviamo

$$(1) \qquad 4\pi u(x_1, y_1, z_1) = \int \left[u \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dH_1}{dn} \right) - \left(\frac{1}{r} - H_1 \right) \frac{du}{dn} \right] d\sigma - \\ - \int \left[\left(\frac{1}{r} - H_1 \right) \varDelta_2 u - u \varDelta_2 H_1 \right] dS .$$

Noi diremo che H_1 è la nostra *prima funzione ausiliaria*, se la grandezza $\frac{1}{r} - H_1$, in ogni punto del contorno, e la grandezza $\Delta_2 H_1$, in ogni punto del campo, sono indipendenti da x_1, y_1, z_1, cioè non variano, comunque si sposti nel campo il solo punto A_1.

Se u è nota al contorno e $\Delta_2 u$ nel campo, la formula (1) determina u nel polo, a meno della costante

$$\int u \Delta_2 H_1 \, dS - \int \left(\frac{1}{r} - H_1 \right) \frac{du}{dn} d\sigma ,$$

la quale si determina subito, facendo tendere il polo verso un arbitrario punto del contorno.

Se K_1 è una funzione regolare in S, tale che la grandezza $\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dK_1}{dn}$, in ogni punto del contorno, e la grandezza $\Delta_2 K_1$, in ogni punto del campo, siano indipendenti dal polo, diremo invece che K_1 è una *funzione analoga alla prima funzione ausiliare*. Una formula analoga alla (1) mostra, in questo caso, che; se della funzione u è noto il Δ_2 nel campo, e, sul contorno, colla condizione

$$\int \frac{du}{dn} d\sigma + \int \Delta_2 u \, dS ,$$

sono noti i valori di $\frac{du}{dn}$, nei singoli punti; basta la conoscenza di K_1 perchè sia determinata u nel polo, a meno d'una costante, che non è, in generale, determinabile.

Passando al caso della Δ_4, vediamo che valgono le due formule note

$$8\pi u(x_1, y_1, z_1) = \int \left(u \frac{d\Delta_2 r}{dn} - \Delta_2 r \frac{du}{dn} \right) d\sigma + \\ + \int \left(\Delta_2 u \frac{dr}{dn} - r \frac{d\Delta_2 u}{dn} \right) d\sigma - \int r \Delta_4 u \, dS ,$$

$$0 = \int \left(u \frac{d\Delta_2 H_2}{dn} - \Delta_2 H_2 \frac{du}{dn} \right) d\sigma + \\ + \int \left(\Delta_2 u \frac{dH_2}{dn} - H_2 \frac{d\Delta_2 u}{dn} \right) d\sigma - \int (H_2 \Delta_4 u - u \Delta_4 H_2) \, dS ,$$

se H_2 denota una funzione regolare in S. Noi chiameremo H_2 *seconda funzione ausiliare*, se la grandezza $\Delta_4 H_2$, nel campo, e le due grandezze $r - H_2$ e $\frac{dr}{dn} - \frac{dH_2}{dn}$, sul contorno, sono indipendenti dal polo. Il solito criterio lascia stabilire una formula, per la quale, se è nota, per un campo, la funzione H_2, è anche nota la funzione u nel polo, dato u e $\frac{du}{dn}$ al contorno.

Vogliamo fare alcuni esempî. Se, in coordinate cartesiane ortogonali, le equazioni $x = h_1, x = -h_1$, $y = h_2, y = -h_2$, $z = h_3, z = -h_3$ rappresentano le sei facce d'un parallelepipedo rettangolo, le grandezze

$$r^2_{a,b,c} = [x - 2ah_1 - (-1)^a x_1]^2 + [y - 2bh_2 - (-1)^b y_1]^2 + \\ + [z - 2ch_3 - (-1)^c z_1]^2,$$

$$\varrho^2_{a,b,c} = [x - 2ah_1]^2 + [y - 2bh_2]^2 + [z - 2ch_3]^2$$

rappresentano rispettivamente i quadrati delle distanze di A dalle immagini di A_1 e del centro di figura, rispetto ai piani delle facce. È, in particolare, $r_{0,0,0} = r$, se conserviamo tutte le precedenti notazioni.

Le funzioni

$$(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0) \left\{ \begin{aligned} H_1 &= \sum_{c=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{a=-\infty}^{\infty} (-1)^{a+b+c+1} \left(\frac{1}{r_{a,b,c}} - \frac{1}{\varrho_{a,b,c}} \right), \\ K_1 &= \sum_{c=-\infty}^{\infty} \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{a,b,c}} - \frac{1}{\varrho_{a,b,c}} \right) \end{aligned} \right.$$

sono rispettivamente una prima funzione ausiliare, e una funzione analoga alla prima funzione ausiliare. La convergenza delle serie risulta da noti criterî, già adoperati da Riemann. Noi vogliamo soltanto notare che è $\Delta_2 K_1 = 0$ nel campo, e che vale la formula

$$\int \frac{dK_1}{dn} d\sigma = 0,$$

come agevolmente si vede.

Un esempio, sul quale vogliamo, invece, insistere, sarà dato dalla determinazione della seconda funzione ausiliare per lo spazio S, contenuto da due piani paralleli, σ_1 e σ_2.

Denotino $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots$ le distanze di A dalle immagini successive di A_1, rispetto ai piani limiti, nell'ordine $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \ldots\ldots$, e, invece, $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots\ldots$ le distanze di A dalle successive immagini di A_1, rispetto ai piani limiti, nell'ordine $\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots$ Denotino ancora $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots\ldots$, $\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3, \ldots\ldots$ le analoghe distanze di A dalle analoghe immagini di un punto, equidistante da σ_1, σ_2, scelto come origine delle coordinate, indipendente da A_1. Siano $z = h$ e $z = -h$ le rispettive equazioni di σ_1, σ_2.

Un procedimento, che abbiamo già adoperato ([1]), mostra che, se poniamo

([1]) Noi ci riferiamo a una Nota *Sulla deformazione d'un solido isotropo limitato da due piani paralleli*, pubblicata nei Rend. di Palermo. In quella Nota sono contenute alcune inesattezze, ma si capisce che ora approfittiamo soltanto di ciò che vi è di esatto; e poi, dalla convergenza di (4), risultano subito convergenti anche tutte le serie ivi adoperate, il che conferma le conchiusioni ivi ottenute.

$u_\nu = r_\nu - \varrho_\nu$, la serie

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Pi(m+2n-1)}{\Pi(m-1)\Pi(2n)} \left[\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}} u_{2n+2m-1} \right.\right.$$

$$\left. - 2(z-h) \frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}} u_{2n+2m-1} - \frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}} u_{2n+2m} \right] (4h)^{2n}$$

$$+ \frac{\Pi(m+2n)}{\Pi(m-1)\Pi(2n+1)} \left[\frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}} u_{2n+2m} - 2(z+h) \frac{\partial^{2n+4}}{\partial z^{2n+4}} u_{2n+2m} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+3}} u_{2n+2m+1} \right] (4h)^{2n+1} \right\},$$

sommata con un'altra, T', ottenuta da T col mutamento di h in $-h$, *se* T *è in ogni punto di* S *assolutamente convergente*, rappresenta una funzione H_2, soluzione regolare in S della $\Delta_4 = 0$, e tale che sul contorno diventi $r - \varrho$, e che la derivata normale coincida colla derivata normale di $r - \varrho$; dunque H_2 verifica le condizioni richieste per essere una *seconda funzione ausiliare*.

Giacchè l'importanza di queste funzioni ausiliari consiste nelle applicazioni che possono farsene, noi vogliamo insistere sulla convergenza assoluta della serie che adoperiamo. Ci basterà assodare la convergenza di

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi(m+2n-1)}{\Pi(m-1)\Pi(2n)} \left| \frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}} u_{2m+2n-1} \right| (4h)^{2n}, \tag{2}$$

e la convergenza assoluta di tutte le altre risulterà dalle cose che diremo per questa.

Osserviamo che si può scrivere

$$u_\nu = r_\nu - \varrho_\nu = x_1 \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial x_1} \right)_m + y_1 \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial y_1} \right)_m + z_1 \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial z_1} \right)_m,$$

dove l'indice m è soltanto un simbolo di valor medio. Si deduce che la convergenza della serie (2) conseguirà dalla convergenza in ogni punto di S, di una serie come l'altra che qui scriviamo:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(m+2n-1)}{\Pi(m-1)\Pi(2n)} \left| \frac{\partial^{2n+3}}{\partial z^{2n+3}} r_{2m+2n-1} \right| (4h)^{2n}. \tag{3}$$

Questo vantaggiosissimo innalzamento dell'ordine di derivazione non si avrebbe, se non avessimo inserito le derivate di $-\varrho_\nu$ (indipendenti dal polo) nella serie. Il procedimento stesso che seguiremo dimostrerà il vantaggio.

Osserviamo che la prima derivata di r_μ, rispetto a z, ha la forma $\frac{Z}{r_\mu}$, dove è facile vedere che cosa indichiamo con Z. Applicando la formula di

Leibniz al prodotto di Z per $\frac{1}{r_\mu}$, e notando che le successive derivate di Z sono tutte nulle, tranne la prima che è uguale all'unità, otteniamo

$$\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial z^{\nu+1}} r_\mu = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \frac{Z}{r_\mu} = Z \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \frac{1}{r_\mu} + \nu \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}} \frac{1}{r_\mu}.$$

Ciò mostra che la convergenza di (3) può dedursi da quella di un'altra serie che differisce da (3) per avere $\frac{2n+2}{r_{2n+2m-1}}$ al posto di $r_{2n+2m-1}$, e una derivazione d'ordine $2n+1$ invece di una d'ordine $2n+3$, nel termine generale. Ma è facile a verificarsi la relazione

$$r_\mu{}^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_\mu} + \frac{Z}{r_\mu} = 0.$$

Per applicazione della formula di Leibniz, se ne deduce

$$(\nu-1)^2 \frac{\partial^{\nu-2}}{\partial z^{\nu-2}} \frac{1}{r_\mu} + (2\nu-1) Z \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}} \frac{1}{r_\mu} + r_\mu{}^2 \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \frac{1}{r_\mu} = 0.$$

Il procedimento d'induzione mostra che esiste un valore di ν, oltre il quale è sempre giusta la relazione

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \frac{1}{r_\mu} \right| < \frac{3^\nu \Pi(\nu-1)}{r_\mu{}^{\nu+1}},$$

e, giacchè si può agevolmente stabilire la formula, per ν abbastanza grande,

$$\lambda^\nu \Pi(\nu) < \nu^\nu,$$

qualunque sia il numero λ indipendente da ν, noi vediamo con osservazioni, che, soltanto per brevità, non riferiamo, che, se converge la serie

$$(4) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi(m+2n-1)}{\Pi(m-1)\Pi(2n)} \left(\frac{3}{\lambda}\right)^{2n+1} \frac{(2n+1)^{2n+1}}{(m+n-1)^{2n+2}},$$

anche la (3) risulta convergente.

Se chiamiamo $v_{m,2n+1}$ il termine qui scritto della (4), il rapporto $v_{m,2n+3} : v_{m,2n+1}$ avrà il valore

$$\frac{(m+2n)(m+2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \left(\frac{3}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{2n+1} \left(\frac{2n+3}{m+n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{m+n}\right)^{2n+2}.$$

È chiaro che, disponendo di λ, noi possiamo fare in modo che, per n abbastanza grande, questo rapporto non superi, *qualunque sia m*, una grandezza α, più piccola di 1. Ma nella Nota, che ho citata, o in facili osservazioni dirette, si hanno tutti gli elementi per dimostrare la convergenza di una serie semplice V_n, dedotta da (4) col tenere fisso n (arbitrario) facendo variare m. Ma il rapporto di tutta V_{n+1} a V_n non supera α, se il rapporto di nessuno dei termini di V_{n+1} ai corrispondenti di V_n supera α, dunque la serie semplice delle V_n, cioè la serie doppia (4), è convergente.

Ne risulta che si può porre $H_2 = T + T'$, e che questa funzione ausiliare lascia risolvere il problema dell'integrazione generale della Δ_4 fra due piani paralleli. Il problema della deformazione elastica di un solido isotropo limitato da due piani paralleli, per tensioni superficiali date, può, dunque, risolversi, senza uso della deformazione ausiliare, come si è, invece, fatto nel citato lavoro. In una Memoria, molto più diffusa di questa breve Nota, io riordinerò e svolgerò queste idee.

Notiamo che, anche nella determinazione della deformazione ausiliare, che si presenta, quando si integrano, col metodo del Betti, le equazioni di equilibrio dei solidi isotropi, può valere il criterio di aggiungere alle componenti di spostamento funzioni arbitrarie, indipendenti dal polo.

È facile notare che l'ordine di derivazione che figura nei termini di (3) ci ha permesso di giungere alle serie semplici V_n, convergenti, ma non avremmo potuto dir nulla se quest'ordine fosse stato più basso.

Matematica. — *Sulla ricerca di soluzioni particolari dei sistemi differenziali.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Sul numero dei punti di Weierstrass fra loro distinti di una curva algebrica di genere p.* Nota della sig.^{na} dott. Isabella Cipolla, presentata dal Socio E. Bertini.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo.* Notizia estratta da una lettera dell'ing. Alessandro Artom al Presidente.

Aderendo al desiderio espressomi con tanta benevolenza e cortesia da S. E. il Ministro della Marina, Ammiraglio Mirabello e da Lei, Illustre Sig. Presidente, mi onoro di comunicarle i risultati ottenuti nelle recenti esperienze compiute coll'efficace concorso della R. Marina italiana riguardo