ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1905.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi*. Nota del Socio Vito Volterra.

Art. I.

1. In una Nota precedente [1] ho mostrato la possibilità di stati di equilibrio di un corpo elastico che occupa uno spazio più volte connesso diversi da quelli che si hanno nel caso di corpi elastici i quali occupano spazî semplicemente connessi. Essi consistono in stati di deformazione interna regolare del corpo, senza che questo sia sollecitato da tensioni esterne nè da forze di massa.

Immaginiamo tracciate le sezioni che rendono semplicemeute connesso lo spazio occupato dal corpo. A ciascuna di esse corrispondono *sei* costanti che abbiamo chiamato le *costanti del taglio*. Di queste è facile stabilire il significato meccanico per mezzo delle formule (III) della Nota citata.

Eseguiamo infatti materialmente i tagli lungo le dette sezioni, lasciando che il corpo riprenda lo stato naturale; e se nel riprendere il detto stato certe parti del corpo venissero a sovrapporsi fra loro, supponiamo tolte le parti sovrabbondanti. Allora le formule (III) della Nota precedente ci dicono che *le particelle situate dalle due parti di una medesima sezione e che*

[1] Seduta del 5 febbraio 1905.

prima del taglio erano a contatto, subiscono, in virtù del taglio stesso, uno spostamento relativo resultante di una traslazione e di una rotazione e tali traslazioni e rotazioni sono eguali per tutte le coppie di particelle adiacenti ad una stessa sezione.

Prendendo per centro di riduzione l'origine, le tre componenti della traslazione e le tre componenti della rotazione, secondo gli assi coordinati, sono le sei caratteristiche del taglio.

Reciprocamente preso il corpo elastico più volte connesso allo stato naturale, si potrà eseguire la operazione inversa per condurlo allo stato di tensione; cioè sezionarlo in modo da renderlo semplicemente connesso, quindi spostare le due faccie di ciascun taglio, l'una relativamente all'altra, in modo che gli spostamenti relativi delle varie coppie di particelle (che aderivano fra loro e che il taglio ha separate), siano resultanti di eguali traslazioni e di eguali rotazioni. Finalmente ripristinare la connessione e la continuità lungo ogni taglio togliendo o aggiungendo quella materia che sarà necessaria e risaldando le parti tra loro. L'insieme di queste operazioni, relative ad ad ogni singolo taglio, si potrà chiamare una *distorsione* del corpo, e le sei costanti di ciascun taglio le *caratteristiche della distorsione.*

In un corpo elastico più volte connesso, la cui deformazione sia regolare e che abbia subìto un certo numero di distorsioni, l'ispezione della deformazione non può in alcun modo rivelare i luoghi ove i tagli e le conseguenti distorsioni sono avvenute, appunto in virtù della regolarità stessa. Ma si può dire ancora qualche cosa di più, ed è che le sei caratteristiche di ciascuna distorsione non sono elementi dipendenti dal luogo dove il taglio è stato eseguito.

Infatti, lo stesso procedimento che ci ha servito per stabilire le formule (III) della Nota precedente, prova che, presi due tagli del corpo, trasformabili l'uno nell'altro con deformazione continua, le costanti relative all'uno sono eguali a quelle relative all'altro.

Ne segue che *le caratteristiche di una distorsione non sono elementi specifici di ciascun taglio, ma dipendono esclusivamente dalla natura geometrica dello spazio occupato dal corpo e dalla deformazione regolare di cui esso è affetto.*

Il numero delle distorsioni indipendenti a cui un corpo elastico può assoggettarsi è evidentemente eguale all'ordine della connessione (ciclosi) dello spazio occupato dal corpo meno 1.

In conformità di ciò che abbiamo trovato, due tagli trasformabili l'uno nell'altro con deformazione continua si chiameranno *equivalenti.* Diremo che *una distorsione è nota quando ne conosceremo le caratteristiche ed il taglio relativo o altro taglio equivalente.*

2. Ciò premesso si presentano naturalmente le due questioni seguenti:

1) A distorsioni scelte arbitrariamente, corrisponderà sempre uno stato d'equilibrio ed una deformazione regolare del corpo, allorchè si suppongono nulle le azioni esterne?

2) Note le distorsioni, quale è questo stato di deformazione?

Per ricondurre questi problemi ad altri noti, dimostreremo il teorema:

In ogni corpo elastico isotropo più volte connesso, preso un insieme arbitrario di distorsioni, si potranno calcolare infinite deformazioni regolari del corpo ad esse corrispondenti ed equilibrate da tensioni superficiali (che denoteremo con T) *aventi resultante nulla e momento nullo rispetto ad un asse qualunque.*

Volendo dunque riconoscere se in un corpo isotropo le date distorsioni corrispondono ad uno stato di equilibrio senza forze esterne, e determinare questo stato, basterà vedere se le tensioni T mutate di segno e applicate al contorno del corpo dato, allorchè questo non è soggetto ad alcuna distorsione, determinano in esso uno stato di deformazione regolare che equilibrii le tensioni stesse e trovare questo stato di deformazione.

Infatti chiamiamo Γ la deformazione relativa alle distorsioni date e alle tensioni superficiali T trovate, e Γ' quella determinata da queste tensioni mutate di segno, allorchè il corpo non subisce alcuna distorsione. La deformazione Γ'' resultante di Γ e di Γ' corrisponderà alle date distorsioni ed a forze esterne nulle.

La questione è quindi ricondotta a vedere se esiste la deformazione Γ' ed a trovarla, ossia ad un problema di elasticità quando mancano le distorsioni, ad un problema cioè ordinario della elasticità.

Ora le tensioni superficiali T, in virtù del teorema enunciato, sono tali che si equilibrerebbero fra loro se il corpo fosse rigido; ne segue che esse soddisfano alle condizioni fondamentali necessarie per la esistenza della deformazione Γ'. Ma, come è noto, non si può dire se le dette condizioni sono sufficienti, giacchè il teorema di esistenza per la elasticità non è stato ancora stabilito definitivamente. Perciò la esistenza della deformazione Γ' e quindi della deformazione Γ'' non può ritenersi provata.

Nondimeno si può prevedere che, salvo condizioni relative alla forma geometrica dello spazio occupato dal corpo elastico (condizioni che non si sanno oggi precisare), Γ' e Γ'' esisteranno sempre.

Colle dette riserve quindi si potrà rispondere affermativamente alla prima questione nel caso dei corpi isotropi.

La seconda questione posta è relativa al caso in cui il corpo non sia soggetto ad azioni esterne; ma essa può generalizzarsi e si può supporre che siano date le distorsioni ed il corpo sia sollecitato da forze esterne date.

Allora, se il corpo è isotropo, per risolvere il problema basterà sovrapporre alla deformazione Γ, determinata dalle distorsioni e dalle tensioni T, quella prodotta dalle azioni esterne date e dalle tensioni superficiali-T nella ipotesi che le distorsioni manchino.

In certo modo il teorema enunciato serve, in tutti i casi di isotropia, *ad eliminare le distorsioni*, sostituendovi delle tensioni superficiali, e perciò esso riconduce le questioni riguardanti distorsioni a questioni ordinarie della elasticità.

Se il corpo fosse anisotropo si vedrebbe facilmente che lo stato di deformazione Γ sarebbe equilibrato da tensioni superficiali e da forze di massa, quindi sarebbe facile anche allora eliminare le distorsioni e ricondurre le varie questioni che possono presentarsi ai problemi ordinari della elasticità.

L'art. II sarà consacrato alla dimostrazione del teorema sopra enunciato e l'art. III all'esame di un caso particolare.

Art. II.

1. Per dimostrare il teorema enunciato nell' Art. precedente ci converrà stabilire alcune formule preliminari (1).

Denotando con r la distanza fra due punti (x, y, z) e (ξ, η, ζ) poniamo col Somigliana (2)

$$\begin{array}{lll} u_1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}, & v_1 = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}, & w_1 = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} \\ u_2 = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial x}, & v_2 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}, & w_2 = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z} \\ u_3 = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial x}, & v_3 = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial y}, & w_3 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}. \end{array}$$

Le precedenti funzioni non hanno singolarità altro che per $x = \xi$, $y = \eta, z = \zeta$ e sono simmetriche rispetto alle coppie di variabili $x, \xi\,;\ y, \eta\,;\ z, \zeta$.

Se $\alpha = -\dfrac{L + K}{L + 2K}$ ciascuna terna di funzioni u_s, v_s, w_s verifica in tutto lo spazio, (escluso il detto luogo singolare) le equazioni differenziali

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & K\Delta^2 u + (K + L)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \\ & K\Delta^2 v + (K + L)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \\ & K\Delta^2 w + (K + L)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

(1) Esposi queste formule in un corso sulla teoria della elasticità che tenni in Pisa nel 1892 ed esse vennero già citate dal prof. Lauricella nella sua dissertazione (Annali della Sc. Normale di Pisa, 1894).

(2) Annali di Matematica, T. XVII, S. II.

e le (1′) che possono ricavarsi dalle (1) sostituendo ξ, η, ζ a x, y, z. Perciò u_s, v_s, w_s possono interpretarsi come componenti degli spostamenti delle particelle d'un mezzo elastico isotropo ed omogeneo e non soggetto a forze di massa, tanto considerandole funzioni di x, y, z quanto di ξ, η, ζ.

Preso nel punto ξ, η, ζ un elemento d'area $d\Sigma$, la cui normale sia n, denotiamo con X_s, Y_s, Z_s le componenti della tensione unitaria (corrispondente agli spostamenti u_s, v_s, w_s) che esercita, lungo Σ, la regione del mezzo elastico la quale giace dalla parte da cui esce la normale n sopra quella situata dalla parte in cui entra la normale stessa.

Il calcolo di X_s, Y_s, Z_s non presenta difficoltà. Sia ora u_0, v_0, w_0 una soluzione delle (1) regolare entro lo spazio S limitato da una superficie Σ. X_0, Y_0, Z_0 le componenti della tensione superficiale corrispondente. Le formule del Somigliana danno

$$\frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_0 u_1 + Y_0 v_1 + Z_0 w_1)\, d\Sigma + \\ + \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_1 u_0 + Y_1 v_0 + Z_1 w_0)\, d\Sigma = u_0(x, y, z),$$

$$\frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_0 u_2 + Y_0 v_2 + Z_0 w_2)\, d\Sigma + \\ + \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_2 u_0 + Y_2 v_0 + Z_2 w_0)\, d\Sigma = v_0(x, y, z),$$

$$\frac{1}{4\Sigma K}\int_\Sigma (X_0 u_3 + Y_0 v_3 + Z_0 w_3)\, d\Sigma + \\ + \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_3 u_0 + Y_3 v_0 + Z_3 w_0)\, d\Sigma = w_0(x, y, z),$$

nella ipotesi che il punto x, y, z sia interno ad S e ξ, η, ζ rappresentino le coordinate dei punti di Σ. Nel calcolare X_s, Y_s, Z_s si supporrà la normale diretta dall'esterno verso l'interno di S.

Invece se il punto x, y, z fosse esterno, i secondi membri delle equazioni precedenti resulterebbero nulli.

2. Poniamo ora nelle formule precedenti

$$u_0 = l + ry - qz \;,\quad v_0 = m + pz - rx \;,\quad w_0 = n + qx - py, \tag{2}$$

ove l, m, n, p, q, r sono quantità costanti. Le (1) saranno soddisfatte, ed X_0, Y_0, Z_0 resulteranno nulle. Avremo quindi che gl'integrali

$$U = \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_1 u_0 + Y_1 v_0 + Z_1 w_0)\, d\Sigma$$

$$V = \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_2 u_0 + Y_2 v_0 + Z_2 w_0)\, d\Sigma$$

$$W = \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_3 u_0 + Y_3 v_0 + Z_3 w_0)\, d\Sigma$$

saranno respettivamente eguali a $l+ry-qz$, $m+pz-rx$, $n+qx-py$, se il punto x, y, z sarà interno allo spazio S, e saranno nulli se il punto stesso sarà esterno [1].

Finalmente si vede subito che calcolando

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\Gamma_{11}\ ,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\Gamma_{22}\ ,\quad \frac{\partial W}{\partial z}=\Gamma_{33}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}=\Gamma_{23}\ ,\quad \frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}=\Gamma_{31}\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}=\Gamma_{12}$$

le Γ_{rs} saranno nulle, tanto se x, y, z sarà interno, quanto se sarà esterno allo spazio S.

Potremo dunque concludere che, attraversando la superficie Σ le U, V, W saranno discontinue, mentre le Γ_{rs} non avranno discontinuità. Chiamando U_i, V_i, W_i i valori di U, V, W lungo Σ dalla parte interna, e U_e, V_e, W_e i loro valori dalla parte esterna avremo

$$U_i-U_e=l+ry-qz\ ,\quad V_i-V_e=m+pz-rx\ ,\quad W_i-W_e=n+qx-py.$$

3. Ciò premesso spezziamo la superficie Σ in due parti σ e σ' e poniamo

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=\frac{1}{4\pi K}\int_\sigma (X_1u_0+Y_1v_0+Z_1w_0)\,d\sigma\\ v&=\frac{1}{4\pi K}\int_\sigma (X_2u_0+Y_2v_0+Z_2w_0)\,d\sigma\\ w&=\frac{1}{4\pi K}\int_\sigma (X_3u_0+Y_3v_0+Z_3w_0)\,d\sigma\end{aligned}\right.$$

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} u'&=\frac{1}{4\pi K}\int_{\sigma'} (X_1u_0+Y_1v_0+Z_1w_0)\,d\sigma'\\ v'&=\frac{1}{4\pi K}\int_{\sigma'} (X_2u_0+Y_2v_0+Z_2w_0)\,d\sigma'\\ w'&=\frac{1}{4\pi K}\int_{\sigma'} (X_3u_0+Y_3v_0+Z_3w_0)\,d\sigma'.\end{aligned}\right.$$

È facile vedere che u, v, w; u', v', w' godono delle proprietà seguenti:

1° escluso σ, in tutti gli altri punti dello spazio u, v, w sono funzioni finite continue monodrome e aventi derivate di qualsiasi ordine;

2° escluso σ, le u, v, w soddisfano le (1), quindi possono interpretarsi come componenti di spostamenti di un mezzo elastico isotropo omogeneo non soggetto a forze di massa;

[1] Eguagliando nei due membri delle equazioni precedenti i coefficienti di l, m, n, p, q, r si trovano delle relazioni integrali analoghe alle formule di Gauss nella teoria del potenziale. Cfr. la Memoria citata del Lauricella, cap. III, § 3.

3° u', v', w' godono delle stesse proprietà di u, v, w, purchè si sostituisca σ' a σ.

4° Avremo finalmente

$$U = u + u' \quad , \quad V = v + v' \quad , \quad W = w + w'.$$

Ora u', v', w' lungo σ sono continue, mentre U, V, W sono discontinue; ne segue che u, v, w avranno lungo σ la stessa discontinuità di U, V, W. Formiamo ora

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{11} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma_{22} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma_{33} \, ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{23} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{31} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{12}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \gamma'_{11} \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = \gamma'_{22} \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial z} = \gamma'_{33} \, ,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} = \gamma'_{23} \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} = \gamma'_{31} \quad , \quad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = \gamma'_{12} .$$

Sarà

$$\gamma_{rs} + \gamma'_{rs} = \Gamma_{rs} = 0 \, .$$

Ma le γ'_{rs} si mantengono regolari [1] attraversando la superficie σ (escluso tutto al più il contorno di σ) quindi anche le γ_{rs} godranno della stessa proprietà.

Sostituendo nelle (3) a u_0, v_0, w_0 i valori (2) e ordinando le (3) rispetto a l, m, n, p, q, r si giunge dunque al teorema seguente:

Presa una superficie σ e posto

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A^{(\sigma)}_{i1} = \dfrac{1}{4\pi K} \displaystyle\int_\sigma X_i \, d\sigma \quad , \quad A^{(\sigma)}_{i2} = \dfrac{1}{4\pi K} \displaystyle\int_\sigma Y_i \, d\sigma \quad , \quad A^{(\sigma)}_{i3} = \dfrac{1}{4\pi K} \displaystyle\int_\sigma Z_i \, d\sigma \\ B^{(\sigma)}_{i1} = \dfrac{1}{4\pi K} \displaystyle\int_\sigma (\zeta Y_i - \eta Z_i) \, d\sigma \quad , \quad B^{(\sigma)}_{i2} = \dfrac{1}{4\pi K} \displaystyle\int_\sigma (\xi Z_i - \zeta X_i) \, d\sigma \, , \\ \qquad B^{(\sigma)}_{i3} = \dfrac{1}{4\pi K} \displaystyle\int_\sigma (\eta X_i - \xi Y_i) \, d\sigma \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u = A^{(\sigma)}_{11} \, l + A^{(\sigma)}_{12} \, m + A^{(\sigma)}_{13} \, n + B^{(\sigma)}_{11} \, p + B^{(\sigma)}_{12} \, q + B^{(\sigma)}_{13} \, r \\ v = A^{(\sigma)}_{21} \, l + A^{(\sigma)}_{22} \, m + A^{(\sigma)}_{23} \, n + B^{(\sigma)}_{21} \, p + B^{(\sigma)}_{22} \, q + B^{(\sigma)}_{23} \, r \\ w = A^{(\sigma)}_{31} \, l + A^{(\sigma)}_{32} \, m + A^{(\sigma)}_{33} \, n + B^{(\sigma)}_{31} \, p + B^{(\sigma)}_{32} \, q + B^{(\sigma)}_{33} \, r \end{cases}$$

[1] Vedi Nota citata, Art. 1, § 3.

in cui l, m, n, p, q, r sono costanti arbitrarie, le u, v, w possono interpretarsi come componenti dello spostamento di un mezzo elastico isotropo ed omogeneo non soggetto a forze di massa la cui deformazione è regolare in tutto lo spazio, escluso tutto al più il contorno L di σ; mentre le u, v, w stesse saranno discontinue lungo σ e le discontinuità saranno individuate dalle equazioni

$$
(4) \qquad u_i - u_e = l + ry - qz \quad , \quad v_i - v_e = m + pz - rx \, , \quad w_i - w_e = n + qx - py \, ,
$$

dove u_e, v_e, w_e, denotano i valori di u, v, w dalla parte da cui esce la normale alla superficie σ e u_i, v_i, w_i i valori dalla parte in cui la normale stessa entra.

Da questa proposizione si ricava che, partendo dalle caratteristiche della precedente deformazione, e calcolando mediante le formule (I), (I'), (I'') della Nota citata le quantità u, v, w, queste resulteranno polidrome allorchè la superficie σ sarà aperta; la linea, o le linee di diramazione saranno costituite dal contorno L di σ, e la polidromia di u, v, w sarà individuata dalle formule (4).

4. Supponiamo dato un corpo $n+1$ volte connesso S ed eseguite n sezioni che lo rendano semplicemente connesso.

Chiamiamo $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$ n superficie formate dalle dette sezioni prolungate comunque fuori di S. Posto

$$
(\mathrm{II}') \quad \begin{cases} u = \sum_1^n{}_i \left[A_{11}^{(\sigma_i)} l_i + A_{12}^{(\sigma_i)} m_i + A_{13}^{(\sigma_i)} n_i + B_{11}^{(\sigma_i)} p_i + B_{12}^{(\sigma_i)} q_i + B_{13}^{(\sigma_i)} r_i \right] \\ v = \sum_1^n{}_i \left[A_{21}^{(\sigma_i)} l_i + A_{22}^{(\sigma_i)} m_i + A_{23}^{(\sigma_i)} n_i + B_{21}^{(\sigma_i)} p_i + B_{22}^{(\sigma_i)} q_i + B_{23}^{(\sigma_i)} r_i \right] \\ w = \sum_1^n{}_i \left[A_{31}^{(\sigma_i)} l_i + A_{32}^{(\sigma_i)} m_i + A_{33}^{(\sigma_i)} n_i + B_{31}^{(\sigma_i)} p_i + B_{32}^{(\sigma_i)} q_i + B_{33}^{(\sigma_i)} r_i \right] \end{cases}
$$

$$
\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \, ,
$$

$$
\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \, ,
$$

in cui $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ sono costanti arbitrarie; la deformazione $\Gamma \equiv (\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})$ sarà regolare entro S e corrisponderà a distorsioni arbitrarie eseguite lungo le dette sezioni.

Le forze di massa corrispondenti saranno nulle. Se calcoliamo le tensioni superficiali, che sollecitano il contorno di S, si vede subito che esse avranno resultante nulla e momento nullo rispetto ad un asse qualunque, giacchè tale è la proprietà di ogni insieme di tensioni superficiali applicate ad un contorno chiuso, allorchè nell' interno la deformazione è regolare e le forze di massa sono nulle.

Il teorema enunciato nell' Art. I è quindi dimostrato.

Art. III.

1. Abbiasi una superficie σ semplicemente connessa e finita nel piano xz, la quale non incontri quest' asse. Mentre il piano xz ruota intorno a z, σ si deformi e si sposti comunque senza mai incontrare z, ritornando dopo un giro completo nella configurazione primitiva. Verrà così generato un solido anulare due volte connesso concatenato coll' asse z. Supponendolo riempito di materia elastica isotropa ed omogenea, vogliamo studiare la distorsione più generale che supporremo eseguita lungo un taglio formato da un piano passante per z.

2. È noto che gli integrali delle (1) debbono essere funzioni biarmoniche. Ora, se l, m, n, p, q, r sono sei costanti arbitrarie le funzioni

$$\frac{1}{2\pi}(l - qz + ry)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} \quad , \quad \frac{1}{2\pi}(m - rx + pz)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x},$$
$$\frac{1}{2\pi}(n - py + qx)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x}$$

sono biarmoniche ed hanno la polidromia corrispondente ad una distorsione di caratteristiche l, m, n, p, q, r.

Però le funzioni precedenti non soddisfano le (1).

Prendiamo quindi

$$u = \frac{1}{2\pi}(l - qz + ry)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \lambda$$
$$v = \frac{1}{2\pi}(m - rx + pz)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \mu$$
$$w = \frac{1}{2\pi}(n - py + qx)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \nu$$

e cerchiamo di verificare le (1) mediante funzioni λ, μ, ν monodrome.

Poniamo

$$\lambda = (ax + by + cz + e)\log(x^2 + y^2)$$
$$\mu = (a'x + b'y + c'z + e')\log(x^2 + y^2)$$
$$\nu = (a''x + b''y + c''z + e'')\log(x^2 + y^2)$$

Le costanti $a, b, c, e, a', b', c', e', a'', b'', c'', e''$ si calcolano facilmente e si trova in tal modo

$$u = \frac{1}{2\pi}\left\{(l - qz + ry)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(-m - pz - \frac{rK}{L+2K}x\right)\log(x^2+y^2)\right\}$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\left\{(m - rx + pz)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\quad l - qz - \frac{rK}{L+2K}y\right)\log(x^2+y^2)\right\}$$

$$w = \frac{1}{2\pi}\left\{(n - py + qx)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}(px + qy)\log(x^2+y^2)\right\}.$$

È facile riconoscere che la deformazione corrispondente è regolare, e si possono pure ottenere senza difficoltà le tensioni superficiali.

Nel caso dunque del solido esaminato la deformazione Γ e le tensioni T dell'Art. I sono senz'altro trovate qualunque sia la distorsione a cui si sottoponga il solido stesso.

3. Le formule che abbiamo dato nell'Art. III della Nota precedente sono state ricavate come caso speciale delle espressioni precedenti. Infatti le (2) della Nota citata si ottengono, quando $\gamma = 0$, prendendo

$$l = m = n = p = q = o\,,\; r = 2\pi\alpha,$$

e le formule (4) della Nota stessa ponendo

$$l = m = p = q = r = o\,,\; n = 2\pi\alpha.$$

Fisiologia. — *L'anidride carbonica come rimedio del male di montagna, e perchè nelle ascensioni aereostatiche questa debba respirarsi coll'ossigeno.* Nota del Socio Angelo Mosso.

Chimica. — *Sopra una reazione delle ammine secondarie.* Nota del Corrispondente Angelo Angeli e del dott. Vincenzo Castellana.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.