ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

Matematica. — *Sul numero dei punti di Weierstrass fra loro distinti di una curva algebrica di genere p.* Nota della sig.^{na} dott. Isabella Cipolla, presentata dal Socio E. Bertini.

Il sig. Segre nella Nota *Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica*, pubblicata in questi Rendiconti (1899), ha trovato una limitazione (maggiore di quella data dall' Hurwitz) pel numero dei punti di Weierstrass fra loro distinti sopra una curva algebrica di dato genere non iperellittica.

Egli ha osservato, cioè, servendosi dei teoremi di Riemann-Roch e di Clifford per le serie speciali, che, indicando rispettivamente con $i, i_1, i_2 \ldots i_{p-3}, i_{p-2}$ la molteplicità che il punto di W. ha per $\infty^{p-2}, \infty^{p-3}, \infty^{p-4}, \ldots \infty^1$, i gruppi canonici [1] che lo contengono, si ha $i=1$ (poichè la curva è non iperellittica) e per gli altri numeri i valgono le limitazioni:

$$\text{A)} \quad \begin{aligned} i_k &\leq 2k+1 \quad \text{per } k=1, 2 \ldots p-3 \\ i_{p-2} &\leq 2p-2 . \end{aligned}$$

Con le notazioni adottate, dalla formula generale che dà l' influenza di un punto qualunque sul numero dei punti $(r+1)=^{upli}$ di una g_n^r, si ha che la molteplicità del punto di W. in discorso fra i punti $p^{\,upli}$ della serie canonica resta espressa da:

$$W = i + i_1 + i_2 + \ldots + i_{p-2} - \frac{p(p-1)}{2}$$

onde sostituendo alle i i loro valori massimi dati dalle A) si ha per W la limitazione:

$$W \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$$

ch'è la limitazione del Segre. Ma il Segre stesso nella Nota in discorso osserva che si può forse, procedendo ad uno studio più accurato dei valori assumibili dai numeri i, abbassare il limite superiore da lui dato per W, e indica anzi la via da tenersi per procedere a questo studio. Egli dice infatti che in corrispondenza a detti numeri i si ha che sulla curva considerata devono esistere particolari serie di determinato ordine e determinata dimen-

(1) Veramente il Segre nella Memoria in discorso in luogo dei numeri i_k usa le espressioni $1+\alpha_1 \ldots + \alpha_k$ essendo le due α i successivi ranghi nel punto di W. della curva canonica corrispondente alla data. Noi per brevità di discorso adoperiamo qui le i.

sione senza punti fissi, e rileva come l'esistenza di queste serie può portare una limitazione pel genere della curva che si considera.

Raccogliendo quest'idea, sono effettivamente riuscita ad abbassare il limite di W dato dal Segre, e scopo di questa mia Nota è appunto di esporre i risultati a cui sono pervenuta.

Dalle limitazioni del Segre dunque si trae che si avrebbe un punto di Weierstrass offrente la massima molteplicità quando nelle formule A) valesse il segno eguale, ossia quando s'avesse che in quel punto

$$\begin{aligned} i_k &= 2k + 1 \quad \text{per } k = 1\,,\, 2 \ldots p - 3 \\ i_{p-2} &= 2p - 2\,. \end{aligned}$$

Supponiamo, s'è possibile, che un tale punto esista, e anzi più in generale supponiamo ch'esista un punto di Weierstrass sopra una curva non iperellittica di genere p in cui una qualunque delle i p. e. la i_k (escluso il valore di $k = p - 2$) abbia il valore $2k + 1$. Allora dovrà esistere sulla curva che si considera una g^k_{2k+2} senza punti fissi e con un punto $(2k + 1)$ ^{uplo} nel punto di W, *non composta*. Ch'esista la g^k_{2k+1} senza punti fissi segue dal fatto che pel teorema di riduzione $(i_k + 1) = 2\,k + 2$ è un ordine mancante nel punto di W., e $(i_{k-1} + 1) \leq 2k$ (per le (A)) è l'ordine mancante che immediatamente lo precede [1], onde $2k + 1$ è certo un ordine esistente che corrisponde a una serie lineare completa di dimensione k pel teorema Riemann-Roch. Che poi questa serie non possa essere composta si vede nel seguente modo: supponiamo dapprima che, essendo le altre i qualunque, sia però $i_{k-1} = 2k - 1$ (suo limite superiore secondo le (A)); per quanto fu detto sopra dovrà esistere allora una g^{k-1}_{2k-1} completa senza punti fissi con un punto $(2k - 1)$ ^{uplo} nel punto di W. ch'è il resto del punto di W. contato due volte rispetto alla g^k_{2k+1} menzionata di sopra; di qui segue che un gruppo *generico* di detta g^k_{2k+1} contenente il punto di W. lo contiene come punto doppio, d'onde si trae che la g^k_{2k+1} non potrebbe che essere composta con un'involuzione del 2° ordine, il che è assurdo poichè $2k + 1$ è un numero dispari. Se poi la i_{k-1} è inferiore a $2k - 1$ il massimo ordine mancante nel punto di W. inferiore all'ordine esistente $2k + 1$ è minore di $2k$ (essendo eguale a $i_{k-1} + 1$) onde $2k$ è un ordine esistente corrispondente a una g^{k-1}_{2k} completa con un punto $2k$ ^{uplo} nel punto di W. non fisso. L'esistenza di questa g^{k-1}_{2k} indica che un gruppo *generico* della g^k_{2k+1} per il punto di W. lo con-

(1) Notiamo per la chiarezza del testo che con le parole *ordini mancanti* nel punto di W. intendiamo gli ordini delle p serie complete d'ordine m con un punto m^{uplo} nel punto di W. che hanno in esso un punto fisso (gli ordini mancanti sono p pel Lükensatz di Weierstrass). Questi ordini mancanti nel punto di W. sono evidentemente l'unità e i numeri i cresciuti ognuno di un'unità (V. Segre, *Introduzione alla geometria*, ecc. Annali di Matematica, t. XXII, pag. 91). Gli ordini delle serie complete d'ordine m con un punto m^{uplo} non fisso nel punto di W. li chiamiamo invece *ordini esistenti*.]

tiene come punto semplice, d'onde segue che detta g^k_{2k+1} non può essere composta.

Possiamo dunque dire in generale:

L'ipotesi che nel punto di W. *una delle* i_k ($k=1, 2 \ldots p-3$) *abbia il valore* $2k+1$ *trae seco di necessità l'esistenza sulla curva data di una serie completa* (speciale) *senza punti fissi d'ordine* $(2k+1)$ *e dimensione* k *con un punto* $(2k+1)^{uplo}$ *nel punto di* W. *che non può essere in nessun caso composta.* Ma allora per $k>1$ possiamo applicare a questa serie un teorema di Castelnuovo (¹) riguardante il massimo genere di una curva contenente una g^r_n $(r>1)$ qualunque, purchè non composta. Questa formula è, chiamando X la parte intera di $\dfrac{n-2}{r-1}$:

B) $$p \leq X \left\{ n-r-\frac{X-1}{2}(r-1) \right\}.$$

Per la nostra g^k_{2k+1} è $\dfrac{n-2}{r-1}=\dfrac{2k-1}{k-1}=2+\dfrac{1}{k-1}$ e per $k>2$ è $X=2$, mentre per $k=2$ è $X=3$. Distinguiamo i due casi. Supponiamo dapprima $k>2$, allora si ha $p\leq k+3$ ossia $k\geq p-3$, ovvero *solo per* $k=p-3$ (chè k non va per ipotesi oltre questo numero) *si può supporre* $i_k=2k+1$, *per valori di* k *maggiori di* 2 *e minori di* $p-3$ *dev'essere* i_k *diverso da* $2k+1$, *ossia minore di questo numero almeno di un'unità.*

Supponiamo ora $k=2$, si ha allora $X=3$ e la B) diventa: $p\leq 6$, onde per $p>6$ non può essere $i_2=5$, ma dev'essere $i_2<5$. Concludiamo dunque che, se $p>6$ pei numeri i_k da $k=2$ a $k=p-4$ si hanno le seguenti limitazioni:

C) $$i_k \leq 2k \quad \text{per } k=2, 3 \ldots p-4.$$

Confrontandole con le limitazioni A) del Segre si vede che il limite superiore di W dato da questi viene così abbassato di $p-5$ unità, si ha cioè:

D) $$W \leq \frac{(p-1)(p-2)}{2} \quad p+6.$$

Per $p\leq 6$ essendo $p-3\leq 3$ le limitazioni di sopra non valgono. Si può però egualmente per $p=5$ e $p=6$ nuovamente abbassare il limite del Segre per W applicando un teorema di Hurwitz. Il teorema è il seguente: *Se* α *e* β *sono due ordini esistenti* $\alpha+\beta$ *esiste anch'esso* (²). Ora basta notare

(¹) G. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare,* ecc. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1893.

(²) Per via geometrica la dimostrazione è ovvia. Basta osservare che se g_α e g_β sono due serie complete che hanno nel punto considerato un punto rispettivamente α^{uplo} e β^{uplo}

che, supponendo di dare sia per $p=5$ che per $p=6$ alle i i valori massimi fornitici dalle formule A) del Segre, risulterebbe in entrambi i casi che 3 è un ordine esistente nel punto di Weierstrass, mentre 6 manca, per concluludere che una tale successione di valori delle i non è ammissibile. Se ne deduce che una qualunque successione ammissibile è diversa da quella dei valori massimi delle i, epperò che il limite superiore di W sia per $p=5$ che per $p=6$ dev'essere diminuito almeno di un'unità ossia ridotto a $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$.

Lo stesso criterio conduce poi ad abbassare di nuovo di un'unità il limite superiore D) di W da noi trovato per $p>6$ quando sia $p>7$. E per vero, se $p>7$, questo limite superiore D) corrisponde alla successione d'ordini mancanti nel punto di W.:

1, 2, 4, 5, 7, 9 ..... la quale non è ammissibile, risultando da essa esistente il 3 e mancante il 9. Se ne trae con ragionamento affatto analogo a quello fatto sopra per $p=6$ e $p=5$, che se $p>7$ si può affermare che sarà:

$$W \leq \frac{(p-2)(p-1)}{2} - p + 5 .$$

Per $p=3$ e $p=4$ invece la limitazione per W è precisamente quella data dal Segre e si può anzi dimostrare (come risulterà dalla mia tesi di laurea, presentata nel dicembre scorso alla R. Università di Pisa, che si pubblicherà negli Annali di quella R. Scuola normale superiore) che esistono effettivamente curve del genere 3 e 4 che posseggono punti di W. cui competono i valori massimi assumibili dalle i secondo le limitazioni A) del Segre. Essendo in generale il numero complessivo dei punti di W. sopra una curva di genere p espresso da $p(p^2-1)$ ne conchiudiamo che: *per $p>7$ i punti di* W. *fra loro distinti sono almeno*:

$$\frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)-2p+10} = \frac{2p(p^2-1)}{(p-3)(p-2)+6}$$

per $p=7$ i punti di W. *fra loro distinti sono almeno*:

$$\frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)-2p+12} = \frac{2p(p^2-1)}{(p-3)(p-2)+8} = 24$$

---

per entrambe non fisso, la serie completa $g_{\alpha+\beta}$ individuata da un gruppo $G_{\alpha+\beta}=G_\alpha+G_\beta$ somma di due qualunque gruppi G_α e G_β delle due serie in discorso è una serie completa senza punti fissi che contiene entrambe le due date e ha il punto considerato come punto $(\alpha+\beta)^{uplo}$.

per $p = 5$, 6 i punti di W. fra loro distinti sono almeno:

$$\frac{2p\,(p^2-1)}{(p-1)\,(p-2)} = \frac{2p\,(p+1)}{p-2}$$

ossia rispettivamente 20 e 21;
per $p = 3$, 4 i punti di W fra loro distinti sono almeno:

$$\frac{2p\,(p^2-1)}{(p-1)\,(p-2)+1}$$

ossia rispettivamente 12 e 15.

Chimica. — *Sull'ossidazione del pirrolo ad immide maleica.* Nota di G. Plancher e C. Ravenna, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota presentata a questa Accademia da uno di noi col dott. F. Cattadori ([1]), venne riferito che ossidando il pirrolo con la miscela di Beckmann, si ottiene la immide dell'acido maleico. Le ricerche che fanno oggetto di questa Nota, furono dirette a caratterizzare la immide maleica ed il suo comportamento; inoltre essa fu trasformata nell'acido maleico.

Ossidando nuove quantità di pirrolo, ci procurammo una discreta quantità di maleinimmide e se ne confermò il punto di fusione a 93°. Se ne fece la determinazione del peso molecolare dalla quale risultò che essa è monomolecolare.

Il prof. G. Boeris si incaricò dell'esame cristallografico e ci comunica i seguenti risultati:

Sistema cristallino: triclino.

$$a:b:c = 1{,}0686:1:0{,}8648$$
$$\alpha = 90^\circ{,}15'$$
$$\beta = 105{,}7'$$
$$\gamma = 108{,}53'$$

Forme osservate $\{100\}$ $\{010\}$ $\{001\}$ $\{1\bar{1}0\}$ $\{011\}$ $\{0\bar{1}\bar{1}\}$

([1]) Questi Rendiconti, vol. XIII, 1° sem., pag. 489.