ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCII.

1905

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1905

nell'aria rarefatta quando è piccola la tensione dell'ossigeno, il CO_2 esercita invece un'azione intensa sull'assorbimento dell'ossigeno nel sangue. Per dare un esempio del modo col quale la somministrazione del CO_2 serve in certo qual modo ad estrarre l'ossigeno del sangue, ricorderò qualche cifra presa dalle tabelle del Bohr. Il sangue con 20 mm. di tensione dell' O_2 sopra 67 $^0/_0$ di O_2 è già saturo quando la tensione del CO_2 è 5 millimetri; se invece la tensione del CO_2 è uguale a 80 millimetri, bastano solo 17 per cento di O_2 onde saturare il sangue.

Secondo questa legge scoperta dal Bohr l'aggiunta di CO_2 all'aria respirata diviene utile quando è debole la pressione parziale dell'ossigeno, perchè a questo modo si utilizzano delle provviste di questo gas nel sangue, che prima rimanevano inerti.

Un'altra causa rende utile il CO_2 nell'aria rarefatta, e questa è la diminuita tensione che ha l'anidride carbonica nel sangue quando diminuisce fortemente la pressione barometrica. Le analisi del sangue che feci col dott. Marro nella Capanna Regina Margherita non lasciano dubbio su questo fatto [1] perchè in quell'altezza diminuiscono contemporaneamente l'ossigeno e il CO_2 del sangue arterioso. Si aggiunge una terza ragione trovata dal prof. Galeotti. Sappiamo dalle determinazioni dell' alcalinità del sangue [2] sulla vetta del Monte Rosa che la diminuzione dell'alcalinità del sangue nell'uomo e sugli animali scende al 36 e al 44 $^0/_0$. Anche questa modificazione profonda della crasi sanguigna mostra perchè sia utile l'aggiunta di CO_2 nell'aria respirata per compensare l'anidride carbonica deficiente nel sangue.

Meccanica. — *Sull'equilibrio elastico di un corpo limitato da un cono di rotazione.* Nota di ORAZIO TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. *Caso in cui in superficie son dati gli spostamenti.* — Fra i casi in cui il problema dell' equilibrio elastico si risolve abbastanza semplicemente, applicando i soliti principii di cui ci siamo serviti molte altre volte [3], si deve annoverare anche quello di un corpo isotropo, limitato da un cono di rotazione. In questa Nota ci proponiamo appunto di indicarne la soluzione rapidamente.

Ricordiamo che, se sulla superficie di un corpo elastico, isotropo, defor-

(1) Mosso e Marro, Archives ital. de Biologie. Tome XXXIX, pag. 395.

(2) Galeotti, Archives ital. de Biologie. Tome XLI, pag. 80.

(3) Vedi p. es.: *Sul probl. dell'equil. elast. di un cilindro circol. indef.*; *Sul probl. dell'equil. elast. di un elliss. di rotaz.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, 1° sem. 1904, pag. 232, e vol. XIV, 1° sem. 1905, pag. 76.

mato e in equilibrio sono dati gli spostamenti u, v, w, il problema consiste nel costruire l'espressione

$$(1)\qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}d\sigma\,,$$

e le analoghe in v e w, nell'ipotesi che la funzione armonica θ (dilatazione elementare), inerente al problema, sia momentaneamente nota e nel determinare poi θ in modo che sia identicamente:

$$(2)\qquad \frac{3\lambda+5\mu}{2\mu}\theta + \frac{\lambda+\mu}{2\pi}\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x} + y\frac{\partial\theta}{\partial y} + z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) -$$
$$-\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \eta\theta\frac{dG}{dn}d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \zeta\theta\frac{dG}{dn}d\sigma\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}d\sigma\right).$$

Il significato dei simboli, in queste formole, è quello solito: σ è la superficie del corpo, G la funzione di Green il cui uso qui, come nelle Note citate, è limitato a rappresentare speditamente una funzione armonica che in superficie acquista dati valori, n la normale interna a σ, λ e μ le costanti di Lamé, e ξ, η, ζ i valori di x, y, z su σ.

Supponiamo ora che il nostro cono abbia per asse di rotazione l'asse x e per vertice l'origine delle coordinate e limitiamoci a considerare il caso in cui il corpo elastico sia limitato da quella falda della superficie conica che contiene nell'interno la direzione positiva dell'asse x, sebbene, lo avvertiamo subito, questa soluzione si estenda, senza difficoltà, al caso più generale in cui il corpo elastico è limitato, in un modo qualunque, solo da superficie coniche di rotazione aventi lo stesso vertice e lo stesso asse.

Introduciamo il sistema di coordinate curvilinee:

$$(3)\qquad x = e^l t\,,\ y = e^l\sqrt{1-t^2}\cos\psi\,,\ z = e^l\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{sen}\,\psi\,,\ 0 < t \leq 1.$$

L'equazione della superficie conica che limita il nostro corpo, sarà allora $t = t_0$ con $0 < t_0 < 1$ e per avere tutti i punti del corpo elastico basterà far variare l da $-\infty$ a $+\infty$, t da t_0 a $+1$ e ψ da 0 a 2π.

Supponiamo ora che sulla superficie $t = t_0$ sia data una funzione $\theta(l, \psi)$ la quale sia sottoposta alle condizioni che per $l = -\infty$, ossia al vertice del cono, qualunque sia la generatrice su cui ci muoviamo, converga verso uno stesso valore finito, indipendente quindi da ψ, e che per $l = +\infty$ si annulli almeno come e^{-2l}; sul resto della superficie conica, $\theta(l, \psi)$ si suppone sviluppabile in serie di Fourier rispetto a ψ, rappresentabile con l'integrale di Fourier rispetto ad l ed avente, rispetto a quest'ultima variabile, derivate finite. Si potrà allora porre

$$(4) \qquad \theta(l, \psi) = e^{-\frac{l}{2}} \sum_0^\infty{}_m \left[\theta_m(l) \cos m\psi + \overline{\theta}_m(l) \operatorname{sen} m\psi\right],$$

e ne verrà che, per $l = -\infty$, le θ_m, $\overline{\theta}_m$ si annulleranno come $e^{\frac{l}{2}}$ almeno e, per $l = +\infty$, come $e^{-\frac{3l}{2}}$ almeno. Com'è noto, la funzione armonica e regolare nell'interno del cono che acquista in superficie i valori (4), sarà rappresentata dalla formula

$$(5) \qquad \frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi} \sum_0^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_m(t, i)}{K_m(t_0, i)} di \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\theta_m(\varrho) \cos m\psi + \overline{\theta}_m(\varrho) \operatorname{sen} m\psi\right] \cos i(l - \varrho)\, d\varrho,$$

dove $K_m(t, i) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d_m K_0(t, i)}{dt^m}$ e $K_0(t, i) = K(t, i)$ è la nota funzione di Mehler, la quale è definita, a meno di un fattore costante, come l'integrale dell'equazione

$$(1 - t^2) \frac{d^2K}{dt^2} - 2t \frac{dK}{dt} - \left(i^2 + \frac{1}{4}\right) K = 0$$

che, per $t = +1$ e per ogni valore di i, è finito. Il fattore costante si sceglie in modo che sia

$$K(t, i) = F\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{-1}\,,\ \frac{1}{2} - i\sqrt{-1}\,,\ 1\,,\ \frac{1-t}{2}\right) =$$
$$= 1 + (4i^2 + 1) \frac{1-t}{2^3} + \frac{(4i^2+1)(4i^2+3^2)}{(2!)^2} \frac{(1-t)^2}{2^6} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(4i^2+1)(4i^2+3^2)\ldots(4i^2+(2r-1)^2)}{(r!)^2} \frac{(1-t)^r}{2^{3r}} + \cdots$$

e dove il simbolo F è il solito simbolo della serie ipergeometrica.

2. Per risolvere ora il nostro problema poniamo:

$$(6) \qquad \frac{1}{4\pi} \int_\sigma u \frac{dG}{dn} d\sigma = \frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi} \sum_0^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_m(t, i)}{K_m(t_0, i)} di \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u_m(\varrho) \cos m\psi + \overline{u}_m(\varrho) \operatorname{sen} m\psi\right] \cos i(l - \varrho)\, d\varrho$$

e valgano per $\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_\sigma v \frac{dG}{dn} d\sigma$, $\dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_\sigma w \frac{dG}{dn} d\sigma$ le espressioni analoghe che si ottengono dalla precedente ponendo, al posto di $u_m(\varrho)$, $\overline{u}_m(\varrho)$, rispettivamente:

$v_m(\varrho)$, $\overline{v}_m(\varrho)$; $w_m(\sigma)$, $\overline{w}_m(\varrho)$. I valori di queste funzioni $u_m(\varrho) \ldots \overline{w}_m(\varrho)$ si devono ritenere noti e ricavati dai dati valori di u, v, w su σ che noi supponiamo soddisfacenti alle condizioni generali enunciate nel numero precedente. Cerchiamo ora di soddisfare al problema assumendo i valori che θ acquista su σ sotto la forma (4) e quindi i valori stessi che θ acquista in tutto il corpo elastico, sotto la forma (5). La possibilità di determinare le θ_m, $\overline{\theta}_m$ in modo che le ipotesi fatte su θ sieno verificate può essere dedotta dalla verifica della soluzione a *posteriori*.

Se, come abbiamo detto, i valori di θ sono dati dalla (5), si trova subito pure:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{t_0\,e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\sum_0^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_m(t,i)}{K_m(t_0,i)}\,di \times \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\left[\theta_m(\varrho)\cos m\psi + \overline{\theta}_m(\varrho)\,\mathrm{sen}\, m\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho, \\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{\sqrt{1-t_0^2}\,e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\left\{\cos\psi \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_1(t,i)}{K_1(t_0,i)}\,di \times\right. \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m+1}(t,i)}{K_{m+1}(t_0,i)}\,di \times \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\left[\theta_m(\varrho)\cos(m+1)\psi + \overline{\theta}_m(\varrho)\,\mathrm{sen}(m+1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m-1}(t,i)}{K_{m-1}(t_0,i)}\,di \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\left[\theta_m(\varrho)\cos(m-1)\psi + \right. \\
&\qquad \left.\left. + \overline{\theta}_m(\varrho)\,\mathrm{sen}(m-1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho\right\}, \\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{\sqrt{1-t_0^2}\,e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\left\{\mathrm{sen}\,\psi \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_1(t,i)}{K_1(t_0,i)}\,di \times\right. \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m+1}(t,i)}{K_{m+1}(t_0,i)}\,di \times \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\left[\theta_m(\varrho)\,\mathrm{sen}(m+1)\psi - \overline{\theta}_m(\varrho)\cos(m+1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m-1}(t,i)}{K_{m-1}(t_0,i)}\,di \int_{-\infty}^{+\infty} e^\varrho\left[-\theta_m(\varrho)\,\mathrm{sen}(m-1)\psi + \right. \\
&\qquad \left.\left. + \overline{\theta}_m(\varrho)\cos(m-1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

e tutti i termini che compaiono nelle (1) sono costruiti. Si tratta ora, come al solito, di determinare le θ_m, $\overline{\theta}_m$ in modo che sia soddisfatta identicamente la (2). Osserviamo perciò che:

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-l}\left[t\frac{\partial}{\partial l} + (1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = e^{-l}\left[\sqrt{1-t^2}\left(\frac{\partial}{\partial l} - t\frac{\partial}{\partial t}\right)\cos\psi - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\partial}{\partial \psi}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = e^{-l}\left[\sqrt{1-t^2}\left(\frac{\partial}{\partial l} - t\frac{\partial}{\partial t}\right)\operatorname{sen}\psi + \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\partial}{\partial \psi}\right]$$

e che quindi:

$$x\frac{\partial\theta}{\partial x} + y\frac{\partial\theta}{\partial y} + z\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\theta}{\partial l} = -\frac{\theta}{2} +$$

$$+\frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\sum_{0}^{\infty}{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{K}_m(t\,,i)}{\mathrm{K}_m(t_0\,,i)}\,di\int_{-\infty}^{+\infty}[\theta'_m(\varrho)\cos m\psi + \overline{\theta}'_m(\varrho)\operatorname{sen} m\psi]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho,$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \xi\theta\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \eta\theta\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \zeta\theta\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma\right)_{t=t_0} =$$

$$= e^{-\frac{l}{2}}\sum_{0}^{\infty}{}_m[\theta'_m(l)\cos m\psi + \overline{\theta}'_m(l)\operatorname{sen} m\psi] +$$

$$+\tfrac{3}{2}e^{-\frac{l}{2}}\sum_{0}^{\infty}{}_m[\theta_m(l)\cos m\psi + \overline{\theta}_m(l)\operatorname{sen} m\psi]$$

$$+\frac{t_0(1-t_0^2)}{2\pi}e^{-\frac{3l}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{\mathrm{K}_0(t_0\,,i)}{\mathrm{K}_1(t_0\,,i)}\,di\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\,\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho +\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{\mathrm{K}_m^2(t_0\,,i)}{\mathrm{K}_{m+1}(t_0\,,i)\,\mathrm{K}_{m-1}(t_0\,,i)}\,di\ \times$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\,[\theta_m(\varrho)\cos m\psi + \overline{\theta}_m(\varrho)\operatorname{sen} m\psi]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho\right\}.$$

Allo stesso modo si pongono i valori che assume il secondo membro per $t = t_0$ sotto la forma

$$e^{-\frac{3l}{2}}\sum_{0}^{\infty}{}_m[f_m(l)\cos m\psi + \overline{f}_m(l)\operatorname{sen} m\psi].$$

Tenendo conto dei risultati ottenuti, la (2), per $t = t_0$, ci dà:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
&e^l\theta_0(l) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\frac{t_0(1-t_0^2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{\mathrm{K}_0(t_0\,,i)}{\mathrm{K}_1(t_0\,,i)}\,di\ \times\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\,\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}f_0(l),\\
&e^l\theta_m(l) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\frac{t_0(1-t_2^0)}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{\mathrm{K}_m^2(t_0\,,i)}{\mathrm{K}_{m+1}(t_0\,,i)\,\mathrm{K}_{m-1}(t_0\,,i)}\,di\ \times\\
&\qquad\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\,\theta_m(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}f_m(l),
\end{aligned}\right.$$

e ad equazioni analoghe soddisfano le $\overline{\theta}_m(l)$. Colla formola data nella Nota citata sul cilindro circolare si ricavano da queste equazioni $e^l\theta_m(l)$, $e^l\overline{\theta}_m(l)$ e quindi θ_m e $\overline{\theta}_m$; ed il problema si può ritenere risoluto completamente. Questo procedimento richiede, come abbiamo detto in tutti i casi analoghi, una verifica, ma questa noi la rimandiamo ad un'altra occasione.

3. *Cenno sul caso in cui son date le tensioni in superficie.* — Se, come al solito, indichiamo con $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ le componenti della rotazione elementare e poniamo per i valori in superficie:

$$(9)\qquad (\varpi_i)_{t=t_0} = e^{-\frac{l}{2}} \sum_0^\infty{}_m \left[\varpi_{i,m}(l)\cos m\psi + \overline{\varpi}_{i,m}(l)\,\mathrm{sen}\, m\psi\right],\ i = 1, 2, 3,$$

mentre supponiamo che i valori che θ acquista sulla superficie, sien dati sempre dalla (4), possiamo subito costruire le funzioni armoniche e regolari nell' interno del cono: θ; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$. Tenendo conto allora che:

$$\cos nx = \sqrt{1-t_0^2}\,, \cos ny = -t_0\cos\psi\,,\ \cos nz = -t_0\,\mathrm{sen}\,\psi\,;$$

$$\frac{d}{dn} = \sqrt{1-t_0^2}\, e^{-l}\frac{\partial}{\partial t}\,,$$

i valori di u, v, w, nell' interno del cono saranno dati dalle formole:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
u &= \frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma \mathrm{L}\mathrm{G}_1\, d\sigma - \frac{\sqrt{1-t_0^2}}{8\pi}\int_\sigma \theta\,\mathrm{G}_1\, d\sigma - \\
&\quad \frac{t_0}{4\pi}\int_\sigma(\varpi_3\cos\psi - \varpi_2\,\mathrm{sen}\,\psi)\,\mathrm{G}_1\, d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,x\theta - \\
&\quad -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\,t_0\sqrt{1-t_0^2}\int_\sigma \frac{\partial\theta}{\partial t}\,\mathrm{G}_1\, d\sigma\,,\\
v &= \frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma \mathrm{M}\mathrm{G}_1\, d\sigma + \frac{t_0}{8\pi}\int_\sigma \theta\cos\psi\,\mathrm{G}_1\, d\sigma - \\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(t_0\varpi_1\,\mathrm{sen}\,\psi + \varpi_3\sqrt{1-t_0^2}\right)\mathrm{G}_1\, d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,y\theta - \\
&\quad \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}(1-t_0^2)\int_\sigma \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\psi\,\mathrm{G}_1\, d\sigma\,,\\
w &= \frac{1}{8\pi\mu}\int_\sigma \mathrm{N}\mathrm{G}_1\, d\sigma + \frac{t_0}{8\pi}\int_\sigma \theta\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{G}_1\, d\sigma + \\
&\quad +\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\varpi_2\sqrt{1-t_0^2} + t_0\varpi_1\cos\psi\right)\mathrm{G}_1\, d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,z\theta - \\
&\quad -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}(1-t_0^2)\int_\sigma \frac{\partial\theta}{\partial t}\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{G}_1\, d\sigma\,,
\end{aligned}\right.$$

dove L, M, N sono le date tensioni e G_1 la funzione di Neumann. Le (10) non sono altro che le formole fondamentali (8) della prima Memoria: *Saggio di una teoria generale* ecc. [1], in cui sono state introdotte le nostre ipotesi particolari. Possiamo ora sempre porre:

$$(11) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{LG}_1\, d\sigma = -\frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi\sqrt{1-t_0^2}}\sum_0^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{K}_m(t\,.\,i)}{\frac{\partial}{\partial t_0}\mathrm{K}_m(t_0\,,\,i)}\,di\,\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{L}(\varrho)\cos m\psi + \overline{\mathrm{L}}(\varrho)\,\mathrm{sen}\, m\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho$$

e due formole analoghe per $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{MG}_1\, d\sigma$, $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{NG}_1\, d\sigma$ le quali si ottengano dalla precedente ponendo $\mathrm{M}(\varrho)$, $\overline{\mathrm{M}}(\varrho)$; $\mathrm{N}(\varrho)$, $\overline{\mathrm{N}}(\varrho)$ rispettivamente per $\mathrm{L}(\varrho)$, $\overline{\mathrm{L}}(\varrho)$. Partendo ora dai valori (4) e (9) di θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 in superficie, è facile costruire tutti i termini che compaiono nelle (10) e la soluzione completa del problema è ridotta alla determinazione delle funzioni incognite θ_m , $\overline{\theta}_m$; $\varpi_{i,m}$, $\overline{\varpi}_{i,m}$ dalle equazioni:

$$(12) \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2mm] 2\varpi_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\ ,\ 2\varpi_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\ ,\ 2\varpi_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\,. \end{cases}$$

L'esposizione completa di tutti i calcoli richiederebbe più spazio di quello che ci sia consentito; perciò noi ci limiteremo ad accennare il procedimento rimandando per maggiori schiarimenti alla Nota sul cilindro, più volte citata. Il modo che parmi il più semplice per completare la soluzione, consiste nel tener conto anche delle equazioni:

$$(13) \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varpi_3}{\partial y}\right) = 0$$

e delle due analoghe. Per mezzo di questa equazione scritta e delle ultime due delle (12) si riesce ad eliminare dalla prima delle (12) le rotazioni ed allora quest'ultima equazione determina le θ_m , $\overline{\theta}_m$. Per mezzo delle due equazioni analoghe alla (13) si possono eliminare dalla seconda delle (12) ϖ_2 e ϖ_3 ed allora quest'ultima equazione è capace di determinare $\varpi_{1,m}$, $\overline{\varpi}_{1,m}$. Finalmente le altre funzioni incognite $\varpi_{2,m}$, $\overline{\varpi}_{2,m}$; $\varpi_{3,m}$, $\overline{\varpi}_{3,m}$ si possono determinare dalle due equazioni analoghe alla (13) di cui abbiamo già parlato.

[1] Ann. di Matem., t. VIII della ser. III, pag. 129.